钟云霄 编著

混沌与分形浅谈



北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

ISBN 978-7-301-16746-5



定价: 12.00元

混沌与分形

浅谈

钟云霄　编著


北京大学出版社
PEKING UNIVERSITY PRESS

图书在版编目(CIP)数据

混沌与分形浅谈/钟云霄编著.—北京:北京大学出版社,2010.3

ISBN 978-7-301-16746-5

Ⅰ.混… Ⅱ.钟… Ⅲ.①混沌学②分形理论 Ⅳ.O415.5 O189.12

中国版本图书馆CIP数据核字(2010)第025884号

书　　名:混沌与分形浅谈

著作责任者:钟云霄　编著

责 任 编 辑:顾卫宇

标 准 书 号:ISBN 978-7-301-16746-5/O・0812

出 版 发 行:北京大学出版社

地　　址:北京市海淀区成府路205号　100871

网　　址:http://www.pup.cn

电 子 邮 箱:zpup@pup.pku.edu.cn

电　　话:邮购部 62752015　发行部 62750672

理科编辑部 62752021　出版部 62754962

印 刷 者:世界知识印刷厂

经 销 者:新华书店

890mm×1240mm　A5　5.5印张　106千字

2010年3月第1版　2010年3月第1次印刷

定　　价:12.00元

序 言

钟君云霄，1950年就学浙江大学物理系时，我在物理系从事教学工作。1952年院系调整，她随着物理系调到复旦大学继续学习，1953年毕业后，又回到浙江大学，与我同在浙江大学物理教研室工作，一直到1955年她随丈夫调到北京大学。因此我们既有师生之谊又有三年同事关系，应该算是老朋友、老熟人。

这次她突然把稿子《混沌与分形浅谈》寄给我看，着实让我有些“不知所措”之感。心想：我虽然一辈子在理论物理方面从事教学与研究工作，但对“混沌与分形”却是个门外汉，让我看这样的稿子，不是为难我了吗？可是，当我耐下心来翻开稿子读下去时，却深深被混沌与分形的内容所吸引，几乎停不下来，一直到我老伴怕影响我健康将稿子从我手上拿走。

钟君有比较好的文笔，写的文章比较流畅。她多年从事教学工作，对如何能把一个问题分析得浅近、透彻、引人入胜，有独到之处。

现在科学的分工越来越细，就是同在物理学的领域中，也有“隔行如隔山”的感觉。这对科学的发展是不利的。古人云“他山之石，可以攻玉”，一个科学家必须有比较广阔的知识，才能在自己所从事的研究中有所借鉴，不至于鼠目寸光。因此，能比较方便地让人了解一些其他学科的知识，通俗科学书的写作是迫切需要的。

《混沌与分形浅谈》就是一本通俗科学书，但又不是一般的通俗科学书。它所讲的问题不是只作泛泛的介绍，而是有一定的数学推导，推导过程详尽而浅显，使读者一读就能读懂，从而获得相应的知识。它既适合高中学生，也适合大学学生；既适合从事该方面研究的人作为入门读物，也适合不从事该方面工作的各类科学工作者作为拓宽知识的读物。这样的通俗科学书是我们社会迫切需要的，我期望能早日出版。

李文铸

2008-06-05 于北京

目 录

引 言

混沌被认为是20世纪物理学的第三次革命，另外两次是相对论与量子力学.从牛顿力学，发展到相对论、量子力学，不管是学物理的人，还是其他学科的人，都比较有明确的概念.但从20世纪60年代才提上日程的“混沌”，却远非如此.也有不少这方面的书籍或文章，但有的专业性很强，起点很高，不是学理论物理的读者就会给繁琐的数学与理论物理基础堵在门外.有的是通俗科学书，但往往偏重趣味性与故事性，使读者知其然而不知其所以然.一本既通俗，又有一定科学理论的书，使有一定数学水平的读者能了解“混沌”到底是怎么一回事，是迫切需要的.

我第一次听到“混沌”是1981年在武汉一次“非平衡统计物理”讨论会上，听郝柏林先生的讲解.他的讲解，引起我极大兴趣，回校后在给学生开“非平衡统计物理”选修

课时加上了“混沌”一章.后来在美国读物理博士学位的我的小女儿,寄给我们厚厚的一摞 James Gleick 的 *CHAOS* 的翻译稿,这是一本很有趣味的通俗科学书.我的老伴,胡济民院士为翻译稿写了序言,与科普出版社联系,准备出版.正在编辑经过努力准备出版时,同一本书的译稿已经在另一出版社捷足先登出版了,只好作罢.但要写一本通俗的、有关“混沌”的书,一直萦回在我老伴的脑海,一直到他染病离开了人世.为了完成老伴的遗愿,也为了不辜负我小女儿的辛苦劳动,我准备在有生之年,完成这任务.

本书采取问答的方式来写.在恰当的时候提一两个问题,可以引起注意,也能添加趣味性.我是一个教师,在我的教学生涯中,我最喜欢上的课是“讨论课”,或通常称“习题课”.这与学生被动地坐着听教师一人在讲台上讲的常规课不同,学生的思想非常活跃,师生的思想都处在竭力思考着的状态,任何问题都能在师生的思想交锋中解决.我已届耄耋之年,不可能再到课堂上去面对年轻学生.我希望我写的书能像“讨论课”一样,让读者都能读懂,不留下任何疑问.

我一辈子写得较多的是讲义,也有理论书籍.通俗科学书到底应该如何写?这是我一次冒昧的尝试.

1. 什么是混沌

"什么是混沌?"

"混沌就是糊里糊涂吧?"

"混沌就是一片浓雾吧?"



盘古生在一片混沌的鸡蛋中

什么是混沌？的确，混沌这个词的原来的意思就是一片模糊．例如可以形容一个人思想上的无知无识，说他混

沌无知；也可以用来描述空间的一片模糊，例如我国古代关于开天辟地的神话，说原来天地一片混沌，像一只鸡蛋，盘古生在其中，他慢慢长大，把天与地分开，轻的往上浮，越来越高成为天，重的往下沉，越来越厚成为地.有意思的是，很多古书中，把我们中国人的祖先——黄帝——称为混沌.《庄子》中说："南海之帝为倏，北海之帝为忽，中央之帝为混沌."历来中国都认为自己是处在世界的中央，中央之帝就是我们炎黄子孙的祖先黄帝，**黄帝的名字叫混沌**.在外国，基督教《圣经》中有关天地的神话，也有类似的描写，说原来天地一片空虚混沌，至高无上的神让天上出现了日、月、星辰，地上出现了水、草、树木，然后才有了动物与人类.

现代科学意义上的混沌，与通常意义下的一片模糊有所不同，有一定的涵义.由于混沌是一门新兴的科学，要用一句简单的话来说出它的定义是不容易的.

通常我们把研究的对象称为系统，如果我们研究水龙头滴下的水滴，水滴就是系统；如果我们研究草原上某种昆虫生态，则一定范围内的昆虫集体就是研究的系统；如果研究的是气象，则一定范围内的气团就是研究的系统；如果研究的是股市的行情，则某种股票就是研究的系统.研究这些系统的运动(也就是变化)时，在数学上要给系统的运动列出运动方程式.要是这些运动方程式是线性的，这类系统就是线性系统，否则就是非线性系统.混沌其实是非线性系统运动的一种状态.这些非线性系统在一定的

条件下，会表现出一些无规性，严格讲是貌似无规性；因为在这些貌似无规性中又会出现一定的规律性来，一般就称为系统出现了混沌状态，简单就说出现了混沌. 因此要给混沌下一个定义的话，可以这样说：**混沌就是系统的无规行为中的规律性.**

“什么是无规行为？怎么知道系统出现了无规行为？”



在自然科学发展史上，意大利物理学家与天文学家伽利略（Galileo Galilei，1564—1642）被称为“近代科学之父”，他首先在科学实验的基础上融会贯通了数学、物理学和天文学三门知识，扩大、加深并改变了人们对物体运动和对宇宙的认识，开创了用实验来证实科学构想的方法.

传说中伽利略在比萨斜塔上丢下了两个不同质量的球，两个球同时落地，证明了不同质量的物体，重力加速度是相同的. 为了证实哥白尼的日心说，伽利略献出了毕生的精力，并因此在晚年受到教会的迫害，被终身监禁. 在伽利略的天文学、力学的基础上，英国的伟大科学家牛顿（Sir Isaac Newton，1643—1727）完成了经典力学体系. 1686年，凝结着牛顿半生心血的《自然哲学的数学原理》出版，书中的理论为以后300年的力学研究打下了基础. 牛顿发现并总结了运动定律，创立了万有引力理论，这些定律既能用来计算行星的规律，预测彗星的行踪，计算宇宙飞船的发射，又能用于各种机械的运行，解决日常的各种力学问题.

牛顿的成就也带给了科学界哲学思想上的确定论，也就是认为一个系统的行为都是有规的. 一个系统，只要弄清楚它所处的环境，立出它的运动方程式，知道它的初始条件，则以后的运动状况都可以计算出来. 这种系统就是决定性的系统，有规的系统；大量的科学实验证明了这一论断的正确性. 它是如此深入人心，以致在遇到例外不能解决问题的情况时，人们总试图用其他的原因来解释这种例外：例如系统受到没有想到的外界的干扰，或者原来的运动方程式作了过分的近似等等，从不怀疑确定论的本身. 法国的著名数学家拉普拉斯（Pierre Simon M. de Laplace，1749—1827）就曾经表示，如果能排出一个无所不包的宇宙方程式，他就能通晓宇宙的过去和未来.

“真能做到这样该多有意思!”

当开普勒、伽利略、牛顿建立经典力学体系,正确地解释了行星绕太阳作椭圆形轨道运动时,给人一种印象:既然两个物体运动的系统能很好地得到解决,三个物体组成的系统,甚至多个物体组成的系统,也应该得到完整解释,不过是在计算技巧方面作出较大的努力而已.但是,在用牛顿力学解三体问题时就碰到了困难.三体问题应该说是从确定性的方程出现混沌的最早的问题,关于这个问题,还有一个有趣的故事.

“有趣的故事?”

为了庆贺 1889 年瑞典和挪威国王奥斯卡二世(King Oscar Ⅱ)的六十诞辰,在 1885—1886 年斯德哥尔摩出版的《数学学报》(*Acta Mathematica*)的第 6 卷上宣布了一项数学科学的悬赏,该项奖金将发给第一个得到 n 体问题一般求解途径的人. 1888 年 5 月,庞加莱(Henri Poincaré, 1854—1912)提交了他关于三体问题运动稳定性的一般证明的论文,该论文经过大数学家维尔斯特拉斯(Weierstrass)和米他格-列夫勒(Mittag-Leffler)的审查,1889 年 1 月 21 日庞加莱获得了这项奖金,2500 克朗.

“庞加莱那么了不起!是什么人哪?”

庞加莱是法国著名的数学力学家.他在 1879 年获得

博士学位.后在巴黎大学教学,讲授数学分析、数学物理、概率论、天文学等课程.1887 年他被选为法国科学院院士,1906 年当选法国科学院院长.

庞加莱的这篇得奖论文准备在《数学学报》上发表.在排印他的论文时,编辑发现有些段落不够清楚,米他格-列夫勒把这个问题告诉了庞加莱,并且希望他写一个注记附在论文的后面.庞加莱在写注记时,发现论文中包含了一个严重的错误.既然是得奖论文,必须改正错误.庞加莱经受着巨大的压力,要在尽可能短的时间内改正这篇论文.但是直至 1890 年 1 月,庞加莱才提交了他的改正论文,而这时登载有错误论文的《数学学报》业已印好.庞加莱原来的论文的长度是 158 页,而改正后的论文有 270 页之多.为了维护奥斯卡奖的威信以及该《数学学报》的信誉,杂志的主编米他格-列夫勒决定将已印好的学报收回销毁,重新印发改正后的论文,为此庞加莱不得不支付了 3585 克朗作为对该杂志的补偿,其数额大大超出了他所得到的奖金.

庞加莱发现,即使在简单的三体问题中,方程的解的状况也非常复杂,以至于对于给定的初始条件,几乎是没有办法预测当时间趋于无穷时,这个轨道的最终命运.这种对于轨道的长时间行为时的不确定性,数学家和物理学家称之为混沌(chaos).庞加莱的发现可以说是混沌理论的最早起源了.

“不是说，混沌就是系统的无规行为中的规律性吗？怎么又成为轨道的长期行为的不确定性了？”

问得好.系统运动轨道的不确定性，是人们首先碰到的混沌现象.但科学工作者对这些不确定性不会就此罢休，面对混乱的状况，必须找出其规律来.因此混沌不是混乱，混沌是在混乱中出现的规律性.

“三体问题那么困难！‘嫦娥一号’的运动不就是三体问题吗？一个地球，一个月球，一个‘嫦娥一号’卫星！”

三体问题是科学发展史上第一个出现混沌的问题.但在实用上，三体问题还是有一定的近似解的.若三个天体中，一个天体的质量与另外两个天体相比可视为无穷小，它对另两个天体的引力作用可以忽略时，则该天体可称为无限小质量天体，另外两个天体则为有限质量天体.研究无限小质量天体在两个有限质量天体的引力作用下的动力学问题称为限制性三体问题，它是一般三体问题的一个特例.例如月球、地球和太阳组成的三体系统中，月球的质量远远小于地球和太阳的质量，在讨论月球运动时可采用限制性三体问题作为近似的力学模型.此外，在小行星运动理论、月球火箭运动理论和行星际飞行器运动理论中都采用限制性三体问题作为近似模型.在限制性三体问题中，由于两个有限质量体只受它们之间的万有引力作用，

它们组成一个二体问题，每一个有限体都在以它们的质量中心为焦点的圆锥曲线轨道上运动.“嫦娥一号”运动的计算就是一个限制性的三体问题.

“三体问题到现在还没有人能解出吗？”

自16世纪以来，科学家就试图寻找这一问题的简单特解，即特殊情况下的简单稳定运动轨道. 瑞士数学家欧拉(L. P. Euler)证明，三个质量相同的物体呈直线等距离排列，两端的物体绕中间的物体作圆周运动，是一个稳定轨道. 法国数学家拉格朗日(G. L. Lagrangia)则于18世纪提出了一些特解的情形，例如三个等质量物体排列成等边三角形，绕三角形的中心作圆周运动. 近年来，计算机运算表明，三个等质量的物体在一条“8”字形轨道上运动，可能也是一个特解. 不过，虽然这种“8”字形运动轨道理论上是可以存在的，但它在实际中出现的可能性太小，到现在，整个宇宙中也没有找到过一个这样美妙的“8”字.

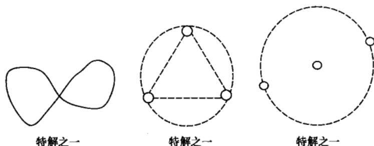


图 1.1 三体问题的特解

至今，我们不得不承认，对太阳系（即使仅限于引力作

用)的长期行为的预测是不可能的.初始条件非常小的变化,会对以后的运动产生巨大的效应:实际上是出现了混沌.

另一个出现混沌的例子,就是气象预报中的著名的"蝴蝶效应".1960年,美国科学家爱德华·洛伦茨(Edward Lorenz)利用计算机来作天气预报.

"怎样利用计算机来预报天气呢?"

经典力学在天体运动以及预报潮汐运动中的成功,使得20世纪50年代与60年代之间对气象的长期预报充满了盲目的乐观.人们想,既然能预报潮汐,为什么不能长期预报气象?都是流体嘛,不过方程式复杂一些而已.人类应该不但能预报天气,还应该能控制并改造天气,这是多么吸引人的理想.我国老一辈的气象学家赵九章先生有一次对年轻学生说:"气象学家应该像一个大乐队的指挥,指挥着一大批人作计算,来预报天气."

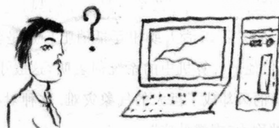
"为什么要一大批人?"

50年代计算机远没有现在那么快速,而描述气团运动的方程式远比描写一颗卫星或彗星的方程式要复杂得多;初始条件也远不只是一个位置与速度而已,需要很多点的速度、温度、密度、湿度等等.这很多点就是很多气象台,很多气象台送来的气象数据作为初始条件,用这些初始条件来计算气团的运动,从而获得以后各地的气象情况,这就

是天气预报.因需要计算的东西很多,所以需要像指挥一个乐队那样指挥.计算机的发展与气象学上的需要不无关系.

洛伦茨用模型模拟了地球上的气团运动情况,他自己称之为在计算机上创造出一套游戏气象,每过一分钟,机器吐出一串数字,从这些数字可以看出地球上的天气变化.洛伦茨是个气象学家,从孩子时候起就是一个气象迷,他的老家在美国康涅迪格(Connecticut)州的西哈特夫市,他最喜欢测量每天室外的最高与最低温度;但他从小也很喜欢数学,喜欢攒研数学游戏中的难题.1938 年在达莫斯学校毕业时,他已经认定自己要一辈子去从事数学事业了,但第二次世界大战把他推向了空军,做了气象预报员.战后,他继续攻气象学,并且把数学与气象预报结合起来.他用经典力学来研究气象,他深信经典的牛顿力学,他的想法是:牛顿力学成功地计算了天体的运动.只要知道初始条件,也就是说,知道某一时刻一个物体在什么位置,具有什么速度,就能知道以后任何时刻它所在的地方以及它的速度.云雾的运动当然要比一个行星的运动复杂些,对于一颗行星,在只希望了解它的行踪时,是可以把它当作一个不用考虑大小的质点的.但只要把云团的初始条件写出来,运用流体力学的方程式,不管是多么复杂的方程式,总是应该知道云团的变化结果.

难道是计算机出了故障？



“洛伦茨得出结果了吗？”

洛伦茨运用他当时先进的计算机，排出了云团运动方程式，计算机吐出的数字基本上与天气预报员的观测符合.计算机是很忠实的，用相同的初始条件总是一丝不苟地给你同样的结果.

1961年的某一天，为了检验一个很长的计算过程，洛伦茨想走捷径，他没有从原来的初始条件出发，而是用机器输出的一中间结果作为初始条件输入.意外的情况出现了，气候的变化开始遵循了原来计算的结果，但时间一长，偏离出现了，而且越来越大.在计算机上运行几秒钟就代表了几天；在相应的几个月后，两次预报的气象几乎已经没有相似的地方.这到底是怎么回事呢？难道计算机出了故障？很快，他知道了原因，问题出在他第二次输入的数据上，计算机储存的中间结果是小数点后六位数字，例如0.506 127，而屏幕上输出的结果，为了节省空间，只有三位数，即0.506；洛伦茨用作初始条件输入的是后者而不是前

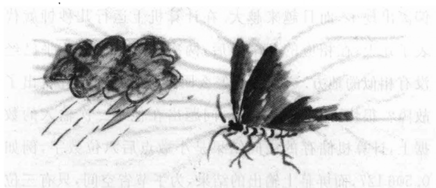
者，他原以为这千分之一的区别是无关紧要的. 在气象上，一个小小的数据误差就好像是一股小小的风，这股小小的风在发展中总是可以消失或相互抵消吧！这是洛伦茨开始的想法；但他的计算机中的系统却表明，这股小小的、原先微不足道的风却成了巨大的气象灾难. 这种对初始条件的敏感性被称为“蝴蝶效应”.

“为什么要叫蝴蝶效应？”

蝴蝶不是很小的昆虫吗，它的翅膀很小，翅膀扇动一下，当然也会引起气团这一点的速度以及密度的变化，但可以想象这是多么小的一点啊！这么小的一点初始条件的变动就能引起一个月后或几个月后、附近或千里以外气象上的风暴.

“蝴蝶扇动一下翅膀真能引起一场风暴吗？那多可怕！”

蝴蝶在西双版纳扇一下翅膀，使纽约发生一场暴风雨



不是的，这只是说明洛伦茨的气象方程式对初始条件

的敏感性.计算机上出现的风暴只是一个假象,说明了长期的气象预报是不可能的,因为实际上气象台测量的初始条件都不可能是没有一点点误差.

想长期预报气象从而能控制并改造天气,想把这吸引人的理想付之实施的典型人物之一还有美国的科学家冯·诺依曼(von Neumann),他在制造他的第一台计算机时,目的之一就是控制天气.他的周围聚集了一批气象学家,在物理学界他高谈他的激动人心的计划.冯·诺依曼想象,有了不知疲倦的计算机,科学家们将计算出几天的流体运动方程的解,然后可以利用一些手段,将气象推向所要求的形式.

80年代,在美国马里兰州的边缘,华盛顿的郊外,有一个庞大的机构用来完成冯·诺依曼的使命,聚集了美国最优秀的气象预报员们.计算机的模拟的确使气象工作成为一门科学,欧洲的气象中心估计,即使是一个不很准确的气象预报,也可使全世界每年节省下几十亿美元.然而,超过两到三天,最好的预报也变成了猜测性的了;超过七天,蝴蝶效应就变得很显著,一个预报可以被很小的一点气象变化破坏掉,误差与不确定性成倍地扩大:从一个小飞尘和小旋风变成只有从人造卫星上才能看清的整个大陆上的旋涡,因而预报就毫无价值.

"计算机能计算得更准确些吗?"

现代的气象模型用的是间隔 60 英里(1 英里=

1.609 344 千米)的格点,也就是说,每隔 60 英里测一点气象数据作为初始条件,然后来计算气象的变化.即使这样,由于在地面和从卫星不可能看到每个地方,有一些初始条件只好靠猜测.但即使地球上铺满了一尺一个的感应器,再一尺一层排满大气层,即使每个感应器都能十全十美地读出温度、气压、湿度等气象学家所需要的任何量,然后用一台无限大的计算机取得所有点的数据,计算以后的温度、气压、湿度等的变化,就算是这样,这台计算机仍然不能预报在一个月后的某一天的天气.

洛伦茨的发现是一次意外,但他准备更深入地探讨这一发现的后果,探讨蝴蝶效应对流体流动的意义.洛伦茨并没有停留在蝴蝶效应上,若停留在可预料性被单纯的随机性战胜这一图像上,那他不过是带来了一条非常坏的消息而已.洛伦茨看到的不仅仅是随机性潜伏在他的气象模型中,他还看到一种精致的几何结构,这是一种伪装成随机性的规律性.这就是混沌.

"为什么混沌是伪装成随机性的规律性?"

前文我们曾给混沌下过一个定义:**混沌就是系统的无规行为中的规律性**.这种无规行为,或无秩序,是一种表面现象,好像是伪装的;只有仔细地分析,才能看到它的规律性.有意思的是,我们的先辈把黄帝取名为混沌,这混沌的含义倒是与现代对混沌的定义不谋而合.

"怎么会不谋而合？把黄帝取名为混沌有什么意思？"

黄帝，不管是一个传说还是真有其人，反正是我们中华民族的最早统治者.按历史上的理解（例如庄子），被统治的人民好像是希望他表面上对一切都比较含糊，比较糊涂，貌似什么都不放在心上；而实际上却又有着一定的规律性，这就是政治上的混沌，正与现代的混沌定义相合.

"洛伦茨从此对长期天气预报就灰心了吗？"

洛伦茨在长期天气预报上遇到的失败，使他的注意力越来越从气象学转移到数学上来，他要找到一种描述这样的系统的数学模型，这种系统永远找不到稳定态，它在运动过程中从来不会重复自己的状态.

"气象是这种从不会重复自己状态的系统吗？"

气象正是这样一种从不会重复自己的非周期性的系统，如果天气能达到一个和以前达到过的完全一样的状态，每一股风、每一片云都是一样的，那它按理将永远重复自己，预报的问题将变得无聊.因为那样的话，只要计算一次就行了，预报一次就行了，既然大家都知道什么天气后必然是什么天气.

在普通流体力学中，通常都用一个经典方程，即纳维-斯托克斯方程.它简单明了地包括了流体的速度、压强、密

度和黏度等物理量的变化规律. 气象中的流体力学运动要复杂得多,用一个方程式是不够的. 洛伦茨意识到,气象中的不可重复性和预报的不可能之间有着一种联系,但要找到描述这种非周期性运动的方程不是一件容易的事. 经过摸索,他开始用 12 个方程来模拟,最后他简单地用三个方程组成的系统得到这种奇妙的结果;这三个方程是非线性的.

洛伦茨用三个变量、三个方程描述了系统的运动,用三维空间来画出三变量系统的轨迹,如图 1.2 所表示. 点的轨迹永远不相交,它永远地在打圈子,表现出一种无穷尽的复杂性. 图像一直保持在一定的范围内,既不重复自己,又不跑到纸外. 轨迹形成了一个奇怪而明确的图案,像三维空间的一对旋涡,又像一对蝴蝶的翅膀.

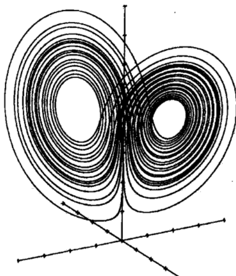


图 1.2 (图取自文献[2])

"这又是一种蝴蝶效应吗?"

不是,这不叫蝴蝶效应.前面已经说过,蝴蝶效应是指对初始条件的敏感性.这种运动状态不断地向某种状态接近,在数学上称为吸引子;后面我们还要详细讲它.这具有两个吸引子的状态是从洛伦茨的方程式得出的,被称为洛伦茨吸引子.

"两个吸引子表示什么呢?"

两个吸引子像两个旋涡,状态从一个旋涡到另一个旋涡,然后又回来,周而复始,但永不重复.洛伦茨称之为"决定性的无周期流动".

当混沌越来越得到人们重视的时候,洛伦茨的"决定性无周期流动"与"洛伦茨吸引子"是被人们引用得最多的概念.洛伦茨对混沌的研究作出了不可磨灭的贡献.

2. 虫口模型——非线性麻雀

从上面我们谈到的内容，我们对混沌知道了些什么？

“混沌是伪装成随机性的规律性.”

“混沌是系统的无规行为中的规律性.”

“混沌运动对初始条件非常敏感，蝴蝶扇一下翅膀就会变成一个大风暴.”

“出现混沌的运动方程式是非线性的.”



人们研究虫口模型干什么？好象在研究我们的生存问题。

对，大家都记得很好．人们了解了一些混沌现象后，要对混沌运动进行研究，就要拿非线性的运动方程式来研究．很多非线性的运动方程式都是很难处理的，如单摆问题．大家熟知，一条可以忽略重量的绳子，一端固定，另一端吊一个重物，让重物摆动起来，就是单摆．单摆的运动方程实际上是非线性的，通常在普通物理课中讨论它时，总是忽略了它的非线性部分，因此在大多数人头脑里，都以为单摆的运动方程式是一个简单的线性方程式，其实它是很复杂的．在混沌的研究提上日程时，有人对一些著名的数学家与物理学家怎么又研究起单摆来还很有些不理解．

流体力学的方程式就更复杂了．要研究混沌出现的原理，要挑一个既简单又有意义，并且能包括混沌运动特性的非线性运动方程来着手，这就是“虫口模型”．麻雀虽小，五脏俱全，有人戏称虫口模型为“非线性麻雀”．

“什么是虫口模型？”

这是一个生态学的问题，可以研究一定范围内的草原上的兔子的数目，也可以研究某种昆虫的数目；可以研究一个池塘里的鱼的数目，也可以研究一个国家的人口的数目．就以兔子为例吧，设以 $z_1, z_2, z_3, \cdots, z_n$ 代表第一年，第二年，第三年，……，第 n 年的兔子的数目，若兔子的数目以一定的比例增加，这个比例系数为 γ，则有：

$$z_{n+1} = \gamma z_n. \tag{2.1}$$

这是一个太简单的生态模型，马尔萨斯的人口论就是

用这个模型，马尔萨斯曾说人口经 25 年就增加一倍，就是上式中时间间隔为 25 年，$\gamma=2$ 的情况. 实际上兔子数目的变化还受其他因素的制约，例如食物. 若兔子多了，供兔子生活的草料不够了，兔子没有吃的东西，就要饿死. 设 Θ 为这样的兔子数：若兔子达到了这个数，则草料全部被吃光，兔子全要饿死. 则第二年的兔子数必然与 $(1-z_n/\Theta)$ 成正比.

"为什么乘上这样的因子就能说明兔子全都要饿死啦？"

因为 $z_n=\Theta$ 时，括号内的值为零，任何数乘以零都为零，因此第二年的兔子数就为零了. 这样，考虑了食物的因素，(2.1)式成为：

$$z_{n+1} = \gamma z_n(1 - z_n/\Theta), \tag{2.2}$$

这式子就比较合理. 将上式除以 Θ，并令 $z_n/\Theta=x_n$，则得

$$x_{n+1} = \gamma x_n(1 - x_n), \tag{2.3}$$

这样的迭代方程式也称为映射方程式. 映射的英文为 map. 为了叙述简单，常把(2.3)式写成：

$$x_{n+1} = \gamma x_n(1 - x_n) \equiv M(x_n). \tag{2.4}$$

(2.3)或(2.4)式就是虫口模型的非线性方程式，这式子又被称为逻辑斯谛(logistic)方程. 选择好 γ 值，用一个 x_1 值代入(2.3)式就能算出 x_2 值，再用 x_2 值代入就能算出 x_3 值，依此类推. 不难看出，x_n 值只能在 0 与 1 之间变化.

"为什么兔子数不能大于 1 呢?"

注意,x_n 不是兔子数了,z_n 才是兔子数呢. 因为兔子数 z_n 最大为 Θ,因此 x_n 最大为 1. 做这种映射计算是很容易的,只要用计算机,编一个很小的程序就能计算了. 还可以用画图的方法表示这种映射. 以 x_{n+1} 为纵坐标,x_n 为横坐标,画出(2.3)式的 x_{n+1} 与 x_n 的关系如图 2.1 中曲线 f 所示. 再画一条 45°对角线 OA,取一个任意值 x_1,在图中以①点表示,从①引一条与 x_n 轴垂直的直线与 f 相交在②点,②点的纵坐标(也就是连接①、②直线的长度)就是以 x_1 代入(2.3)式后计算得的 x_2;从②引一条水平线与 OA 线相交于③点,则③点的横坐标就是 x_2. 从③作一条与 x_n 垂直线与 f 相交于④点,则④点的纵坐标就是 x_3. 这样不断地画就可以从初始点 x_1,找出 x_2,x_3,x_n,…来. 若映射的结果达到了 f 线与 OA 线的交点,即图中的⑤点,则 x_{n+1}

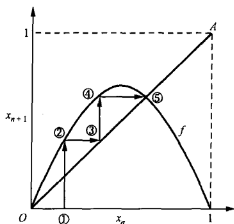


图 2.1

与 x_n 相等，x_n 永远不会再变化了. 你们说，x_n 不再变化说明了什么？

“说明了从那年以后，兔子的数目一年又一年地都一样了.”

嘿！我们的数目永远不变了.



映射后不变的点称为定点. 以 x^* 代表定点，即有：

$$x^* = \gamma x^*(1-x^*) \equiv M(x^*). \qquad (2.5)$$

(2.5)式有两个解，一个是 $x^*=0$，另一个是 $x^*=1-1/\gamma$. 若 $\gamma=2.5$，则 $x^*=1-1/2.5=0.6$ 为定点. $\gamma=3$，则 $x^*=1-1/3=0.6667$ 为定点. 若比较准确画出某个 γ 的 $M(x)$（图 2.1 用 f 表此曲线）曲线，则定点可以从 $M(x)$ 曲线与 45°线的交点看出.

定点 x^* 还有一个稳定性的问题. 若 x 偏离 x^* 一小点，经映射后离开 x^* 更远，则 x^* 这定点是不稳定的；若 x 偏离 x^* 一点，经映射后离 x^* 点更近，则 x^* 是稳定的. 我们

先来看 $x^*=0$ 这个定点.

“$x^*=0$ 不是表示兔子已经没有了，还有必要研究它吗？”

别忘记，兔子的数目是 z_n，而 $x_n=z_n/\Theta$. Θ 可以是一个很大的数目. 例如让 $\Theta=10\,000$，则 $z_n=100$ 时，$x_n=0.01$. 这是很接近 0 的一个数目. 研究 0 点是不是稳定可以用这个很接近 0 的小数代入(2.3)式计算一下. 若 $\gamma=0.3$，则代入(2.3)式不断迭代，则有：

$$0.001, 0.0003, 0.000\,089\,9, \cdots \rightarrow 0;$$

若 $\gamma=1.3$，则有：

$$0.001, 0.002\,553, 0.004\,075, 0.006\,475, \cdots \rightarrow \text{增大},$$

x_n 数目不断增大. γ 值反映了虫口模型的生态环境，生态环境恶劣，兔子数目趋向零，说明定点零是稳定的；改进了生态环境，兔子可以从无到有，慢慢增加.

“γ 应该多大才使一个定点是稳定的呢？”

从画图上已经可以看到一点，图 2.1 的定点是稳定的，而图 2.2 的情形，定点是不稳定的. 稳定还是不稳定取决于 $M(x)$ 曲线在 x^* 点的斜率. 斜率的绝对值小于 1，定点是稳定的；斜率的绝对值大于 1，定点就不稳定. 从稳定到不稳定的过渡就是斜率为 1. 计算曲线的斜率，也就是对曲线方程求微商. $M(x)$ 曲线的微商为：

$$M(x)=\gamma x(1-x),$$

$$M'(x)\equiv\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}x}=\gamma[(1-x)-x]=\gamma(1-2x). \quad (2.6)$$

若 $\gamma<1$，则 $M'(0)=\gamma<1$；若 $\gamma>1$，则 $M'(0)=\gamma>1$. 因而，当 $0<\gamma<1$ 时，定点 $x^*=0$ 稳定.

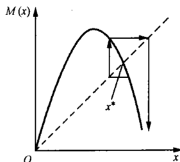


图 2.2

对定点 $x^*=1-1/\gamma$，代入(2.6)式有：

$$M'(1-1/\gamma)=2-\gamma, \quad (2.7)$$

则必须 $1<\gamma<3$，才能使 $|2-\gamma|<1$，这就是定点 $x^*=1-1/\gamma$ 稳定的范围.

我们再来分析二次映射的情况. 为了简单，令初始点为 x_0，一次映射后为 x_1，二次映射后为 x_2，则

$$\begin{cases}x_1=M(x_0)=\gamma x_0(1-x_0),\\ x_2=M(x_1)=\gamma x_1(1-x_1)\equiv M^2(x_0).\end{cases} \quad (2.8)$$

二次映射的曲线的斜率为：

$$\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_0}=\frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}x_0}=M'(x_1)M'(x_0). \quad (2.9)$$

$x^*=1-1/\gamma$，为一次映射的定点，从(2.8)式很容易看出，它也必然是二次映射的定点. $2-\gamma$ 为一次映射曲线 $M(x)$ 在定点 x^* 的斜率，从(2.9)式知，$(2-\gamma)^2$ 为二次映射曲线

$M^2(x)$在定点 x^* 的斜率. 我们不妨计算两条 $M^2(x)$曲线，具体看一下，分别取 $\gamma=2.5$ 与 3.1，数据如下：

表 2.1 $M^2(x)$的计算数据

x	0	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	1.0
$\gamma=2.5$	0	0.436	0.6	0.623	0.6	0.586	0.6	0.623	0.6	0.436	0
$\gamma=3.1$	0	0.624	0.775	0.704	0.590	0.541	0.590	0.704	0.775	0.624	0

将以上数据粗略画图如图 2.3 所示. 当 $\gamma=2.5$ 时，$x^*=1-1/2.5=0.6$，0.6 不仅是 $M(x)$，也是 $M^2(x)$的稳定定点，因为$(2-\gamma)^2=(2-2.5)^2<1$. 当 $\gamma=3.1$ 时，$x^*=1-1/3.1=0.6674$，这也是一次映射与二次映射的定点，但因$(2-\gamma)^2=(2-3.1)^2>1$，这定点对 $M^2(x)$是不稳定的. 在图 2.3(b)上这一点用虚线指出，也能看出该定点的斜率大于 1，因而这定点是不稳定的.

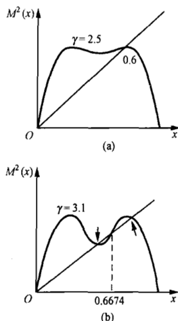


图 2.3

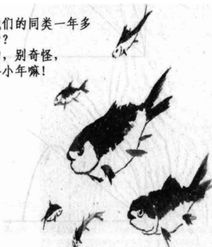
“$\gamma=3.1$ 的 $M^2(x)$ 曲线与 45°线有三个交点了?”

是的，0.6674 旁边又出现了两个稳定的定点，在图中用箭头指出．经过简单的计算，$\gamma=3.1$ 时，可以找到这两个点分别是：

(1) $x^*=0.764\,566$，经一次映射为：0.558 015，再一次映射为：0.764 566.

(2) $x^*=0.558\,015$，经一次映射为：0.764 566，再一次映射为：0.558 015.

这种经过两次映射后回到原出发的稳定定点的映射过程，称为“二周期轨道”．为了统一，把一次映射回到稳定定点的过程称为“一周期轨道”．上面的具体数据是 $\gamma=3.1$ 的情况，实际上，当 $\gamma=3$ 时，一周期轨道已经不稳定，就出现了二周期轨道．说明了一年兔子数目比较多，第二年兔子数目比较少，第三年又比较多．很多生物有这种现象．



"我知道，柿子、桃子都有大年与小年，大年产量多，小年产量少."

对，自然界的很多现象有着共同的本性. 大家看看二周期轨道有什么特点？

"我看就在两个数字上变化，一个是 0.764 566，一个是 0.558 015."

对，若令 $x_1=0.558015$，$x_2=0.764566$. 则一个轨道是 $x_1\to x_2\to x_1$，一个为 $x_2\to x_1\to x_2$.

若以 γ 为横坐标，以定点 x^* 为纵坐标，可以画出 x^* 与 γ 的关系，如图 2.4 所示意，实线表示 x^* 是稳定的，虚线表示不稳定点. 在 $\gamma=3$ 附近，一周期轨道不稳定，稳定点分成两个，在这两个点之间来回转换，图 2.4 上的曲线就分了岔. 若继续增大 γ，当 γ 增加到某个值附近，x^* 分成四个值，即出现四分岔.

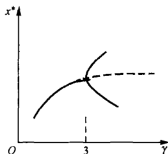


图 2.4

“这个值要多大呢？”

不难在电脑上排一个小程序作迭代计算.结果如下：

$\gamma=3.2$，出现稳定的二周期轨道为：

0.513 045，0.799 455.

$\gamma=3.3$，出现稳定的二周期轨道为：

0.479 427，0.823 603.

$\gamma=3.4$，出现稳定的二周期轨道为：

0.451 967，0.842 156.

“定点 0 与定点 $1-1/\gamma$ 都能从映射方程式看出，这二周期的轨道定点能从方程式计算出来吗？”

“γ 到底多大时出现四分岔？”

这两个问题不难解决.从(2.8)式有：

$$x_2=\gamma x_1(1-x_1)=\gamma^2x(1-x)[1-\gamma x(1-x)],$$

这里 x_1，x_2 分别为一次映射与二次映射后的 x 值.定点意味着 $x_2=x$，因而定点服从的方程式为：

$$x=\gamma^2x(1-x)[1-\gamma x(1-x)]. \qquad (2.10)$$

这是一个四次方程，x 有四个解，显然，已知的两个解，$x=0$ 与 $x=1-1/\gamma$ 必然包括在内.将(2.10)式分解因子，去掉这两个解，得：

$$\gamma x^2-x(1+\gamma)+1+1/\gamma=0.$$

解此方程得：

$$x=\frac{(1+\gamma)\pm\sqrt{(1+\gamma)^2-4\gamma(1+1/\gamma)}}{2\gamma}. \qquad (2.11)$$

这就是另外两个定点的值. 将 $\gamma=3.1,3.2,3.3,3.4$ 代入(2.11)式计算,所得结果与上面用直接迭代所得结果是一样的. 至于 γ 到底多大时二分岔的定点开始不稳定而出现四分岔,则要把(2.11)式的 x 作为 x_0 代入到(2.9)式中去,找出使斜率等于1的 γ 来就成. 用不同 γ 代入计算斜率,得到 $\gamma=3.4495$ 时,斜率的绝对值接近1,也就是说,$\gamma=3.4495$ 是四分岔的开始点.

再继续增大 γ,四周期轨道也变成不稳定,每个点上又分成两个,成为8周期轨道路线;再增大 γ,成为16周期轨道;等等,依次类推. 假如令 $\gamma_0=3$ 为二分岔点,令 $\gamma_1=3.4495$ 为四分岔点,γ_2 为八分岔点,不断计算下去,可以得到 $\gamma_1,\gamma_2,\gamma_3,\cdots,\gamma_m$ 等.

"能计算出 $\gamma_2,\gamma_3,\cdots,\gamma_m$ 等吗?"

可以计算,用计算机排程序作迭代就是了. 早已有人认真地计算过了,费根堡姆(Feigenbaum)[3]发现了这样的规律,即 γ 的取值与某周期轨道稳定的联系:

$1<\gamma\leqslant\gamma_0$,　2^0(即1)周期轨道稳定,

$\gamma_0<\gamma\leqslant\gamma_1$,　2^1(即2)周期轨道稳定,

$\gamma_1<\gamma\leqslant\gamma_2$,　2^2(即4)周期轨道稳定,

$\gamma_2<\gamma\leqslant\gamma_3$,　2^3(即8)周期轨道稳定,

⋮

$\gamma_{m-1}<\gamma\leqslant\gamma_m$,　2^m 周期轨道稳定,

当 m 相当大时(数学上就表示为 $m\to\infty$),存在着:

$$(\gamma_m-\gamma_{m-1})/(\gamma_{m+1}-\gamma_m)\to 4.669\,201\cdots\equiv\delta. \quad (2.12)$$

这是第一个重要的规律,δ 被称为收敛速率.

对每一种周期轨道,$x=0.5$ 都是其中的一条周期轨道,因为在这一点上任一种周期轨道的 M^p 的斜率为零,这里 $p=2^m$,这种轨道称为超稳定轨道.

"为什么 $x=0.5$ 处斜率为零?"

从逻辑斯谛方程(2.3),图 2.1、图 2.4 的 $M(x)$ 及 $M^2(x)$ 的图形中,以及表 2.1 的 $M^2(x)$ 的数据计算中都可以看出,$M(x)$,$M^2(x)$ 以及更多次的映射,对 $x=0.5$ 都是对称的.换句话说,在 $x=0.5$ 点,曲线的斜率都是 0.当然,从(2.6)斜率的公式也直接可以看出,$M'(0.5)=0$.若让 γ 作微小的改变,不难找出包含 0.5 在内的 2 周期、4 周期轨道.费根堡姆找出包含 0.5 在内的 2^m 次的前三个超稳定轨道如下:

$\gamma=3.236$,$x=0.5\to0.8090\to0.5$,$\Delta_1=0.3090$,周期 2 超稳定轨道;

$\gamma=3.4986$,$x=0.5\to0.874\,65\to0.383\,57\to0.827\,23\to0.5$,$\Delta_2=-0.116\,34$,周期 4 超稳定轨道;

$\gamma=3.5546$,$x=0.5\to0.888\,650\to0.351\,732\to0.810\,508\to0.545\,933\to0.881\,150\to0.372\,254\to0.830\,642\to0.5$,$\Delta_3=0.045\,933$,周期 8 超稳定轨道.

其中 Δ_m 被定义为:

$$\Delta_m = x_s - 0.5, \qquad (2.13)$$

而 x_s 为与 0.5 最接近的一个值. 费根堡姆发现,当 m 很大时:

$$\Delta_m / \Delta_{m+1} \rightarrow -2.50280\cdots \equiv \alpha, \qquad (2.14)$$

α 被称为标度因子.

"为什么 α 有一个负号?"

从上面三个超稳定轨道我们已经很清楚地看到,Δ_1 是正的,Δ_2 是负的,Δ_3 又是正的. 因而有: $\Delta_1/\Delta_2 = -2.6560$, $\Delta_2/\Delta_3 = -2.5328$. 而 Δ_2/Δ_3 已经接近 α 值. δ 与 α 是两个普适常量,在混沌理论中有很重要的意义.

"前面我们只讨论到 $\gamma = 3.55$ 附近,若再增加 γ 将发生什么情况?"

图 2.5 与 2.6 就是计算的结果. 从图 2.5 可以看到,γ_m(即 $m \rightarrow \infty$)与 16 分岔点很接近. γ_m 以后就出现一片混沌区域.

"混沌区域怎么还有白的窟窿?"

白的区域被称为窗口,有三个明显窗口. 图 2.6(b)就是图 2.5 的拉长图,三个窗口看得更明显了. 图 2.6(a)图就是把(b)图的第三个窗口放大(图中用两条虚线作为界线)的图. 从放大的图中可以看出,其分岔的情况与开始时(即 $\gamma_0 < \gamma < \gamma_m$ 时)的分岔情况很相似. 这就是混沌的重要

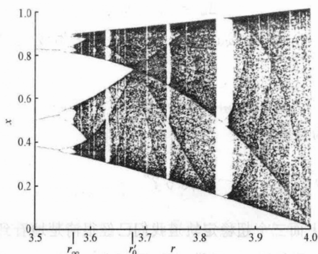


图 2.5　(取自参考文献[1])

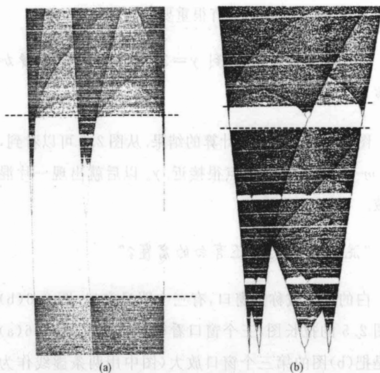


图 2.6　(取自参考文献[1])

特点：自相似的性质.在图中还明显出现一些黑线，这些黑线把混沌区域分成各混沌带、窗口的规律，自相似的规律，黑线的规律，黑区域的密度分布以及普适常数 δ 与 α 的计算与意义，都是需要进一步深入研究的问题.

“为什么图 2.5 只画到 $\gamma=4$ 的情况?”

$\gamma=4$ 是一个很重要的标志.若让虫口模型的映射方程中的 γ 等于 4，(2.3)式成为：

$$x_{n+1} = 4x_n(1-x_n). \tag{2.15}$$

对上式作一次变换，令

$$x_n = \sin^2\left(\frac{\pi y_n}{2}\right) = \frac{1}{2}[1-\cos(\pi y_n)], \tag{2.16}$$

将这结果代入(2.15)式得：

$$\sin^2\left(\frac{\pi y_{n+1}}{2}\right) = [1-\cos(\pi y_n)][1+\cos(\pi y_n)]$$

$$= 1-\cos^2(\pi y_n) = \sin^2(\pi y_n),$$

因而得：

$$\frac{\pi y_{n+1}}{2} = \pm\,\pi y_n + s\pi.$$

记住 y_n 限制在 0 至 1 之间变化，就可以决定上式取正负号与 s 值的关系.若取正号，则 s 必须为 0，且必须 y_n 在 0 与 1/2 之间变化，因 y_n 比 1/2 大时，y_{n+1} 就要比 1 大.若取负号，则必须 $s=1$，且 y_n 必须在 1/2 与 1 之间，即可表示为

$$\left.\begin{aligned} 0:&\quad y_{n+1} = 2y_n, \quad 0 \leqslant y_n \leqslant 1/2, \\ 1:&\quad y_{n+1} = 2-2y_n, \quad 1/2 \leqslant y_n \leqslant 1. \end{aligned}\right\} \tag{2.17}$$

这个映射被称为帐篷映射.

"为什么称为帐篷映射?"

若以 y_n 为横坐标,y_{n+1} 为纵坐标,将(2.17)映射结果画出如图 2.7 所示,图形很像帐篷,故名.

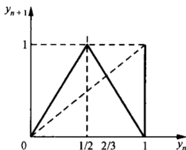


图 2.7

帐篷映射的结果,还可以用一条直线的拉伸与折叠来表示.若 $y_n<1/2$,用的是(2.17)的第一式,则映射为拉伸一倍.若 $y_n>1/2$,则用的是(2.17)的第二式,是 2 减去二倍的 y_n.因而就是一条长度为 2 的直线去掉两倍的 y_n 直线,如图 2.8 的 b 至 2 一段.这一段的长度也等于将 y_n 拉伸一倍后,把超出长度 1 的那一段折叠回去后,箭头所指的地方的长度,也就是值 y_{n+1}.图中画了四种情况:

(1) $y_n>0.5$,拉伸一倍后,比 1 要长,把长出的一段折叠回去,最后的箭头所在处为 y_{n+1}.

(2) $y_n=1$,拉伸一倍后,比 1 要长出 1,折叠回去,$y_{n+1}=0$.

(3) $y_n=0.5$,拉伸一倍后,$y_{n+1}=1$,没有折叠.

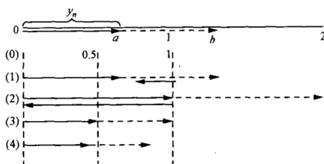


图 2.8

(4) $y_n<0.5$，拉伸一倍后，还在(0,1)之间，没有折叠.

图 2.9 为经两次映射后的图形，图 2.10 为经过三次映射后的图形，图 2.11 为 m 次映射后的示意图. 映射后的第一个高峰在 $y_n=2^{-m}$处出现. 如 $m=3$ 的情况，第一个高峰在 1/8 处，$y_n=2^{-3}=1/8$，第一次拉伸(映射)为 1/4，第二次拉伸为 1/2，第三次拉伸为 1，达到了最高峰.

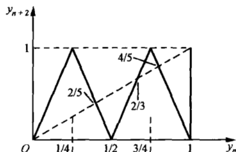


图 2.9

再来看定点的情况. 从(2.17)式看，0 与 2/3 都是一次映射的定点. 若把(2.17)的两个式子用 0 与 1 两个数字来表示，则一次映射的定点为：

0：$y_1=2y$，若 $y_1=y$，则 $y=0$.

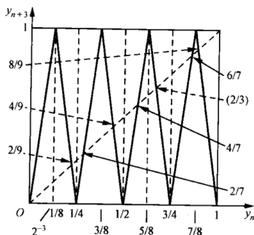


图 2.10

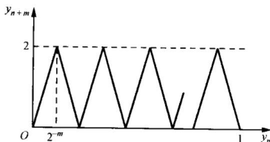


图 2.11

1：$y_1=2(1-y)$，若 $y_1=y$，则 $y=2/3$.

故 0 与 2/3 为一次循环轨道的定点，在图 2.7 中可以看出这两个定点来.

二次映射的次序（按 0，1 的记号）可以是：00，01，10，11 四种，也就是 01 两个数字排列的次数，即为 $2^2=4$，如下：

00：$y_1=2y, y_2=2y_1=4y$，若 $y_2=y$，则 $y=4y, y=0$.

01：$y_1=2y, y_2=2(1-y_1)=2(1-2y)$，若 $y_2=y$，则 $y=2(1-2y), y=2/5$. 迭代过程为：

$$2/5,\ 4/5,\ 2/5.$$

10：$y_1=2(1-y)$，$y_2=2y_1$，若 $y_2=y$，则 $y=4(1-y)$，$y=4/5$. 迭代过程为：

$$4/5,\ 2/5,\ 4/5.$$

11：$y_1=2(1-y)$，$y_2=2(1-y_1)=2(1-2[1-y])$，若 $y_2=y$，则 $y=2-4+4y$，$y=2/3$.

可以看出，00 与 11，就是一次循环轨道的定点，除去这两种，二次循环轨道就有：

两个数排列的总数 2^2 减去 2 次，即为 $2^2-2=2$ 种. 而这两种(01，10)实际上是一种.

“为什么两种实际上是一种？”

因为它们都是 2/5 与 4/5 之间的变化. 若以 N_2 表示两点之间的二次循环轨道数，则有：

$$N_2=(2^2-2)/2=1.$$

三次映射的次序有：000，001，010，100，011，101，110，111，即 $2^3=8$ 种. 显然，000 与 111，分别是 0 与 2/3 两个定点，除去这两个有 $2^3-2=6$ 种. 看这 6 个定点：

001：$y_1=2y$，$y_2=2y_1$，$y_3=2(1-y_2)$，若 $y_3=y$，则 $y=2(1-4y)$，得 $y=2/9$. 迭代过程为：

$$2/9,\ 4/9,\ 8/9,\ 2/9.$$

010：$y_1=2y$，$y_2=2(1-y_1)$，$y_3=2y_2$，若 $y_3=y$，则 $y=4(1-2y)$，得 $y=4/9$. 迭代过程为：

$$4/9,\ 8/9,\ 2/9,\ 4/9.$$

100：$y_1=2(1-y)$，$y_2=2y_1$，$y_3=2y_2$，若 $y_3=y$，则 $y=8(1-y)$，得 $y=8/9$. 迭代过程为：

$$8/9,\ 2/9,\ 4/9,\ 8/9.$$

大家看，以上三种情况有什么特点？

“这三种循环是相同的吧？”

对，这三种循环实际上就是：2/9，4/9，8/9 三个定点之间的循环轨道. 再看：

011：$y_1=2y$，$y_2=2(1-y_1)$，$y_3=2(1-y_2)$，若 $y_3=y$，则 $y=2[1-2(1-2y)]$，得 $y=2/7$. 迭代过程为：

$$2/7,\ 4/7,\ 6/7,\ 2/7.$$

101：$y_1=2(1-y)$，$y_2=2y_1$，$y_3=2(1-y_2)$，若 $y_3=y$，则 $y=2[1-4(1-y)]$，得 $y=6/7$. 迭代过程为：

$$6/7,\ 2/7,\ 4/7,\ 6/7.$$

110：$y_1=2(1-y)$，$y_2=2(1-y_1)$，$y_3=2y_2$，若 $y_3=y$，则 $y=4[1-2(1-y)]$，得 $y=4/7$. 迭代过程为：

$$4/7,\ 6/7,\ 2/7,\ 4/7.$$

以上三种也就是 2/7，4/7，6/7 三个定点之间的循环轨道. 因此：

$$N_3=(2^3-2)/3=2.$$

从图 2.10 可以看出，用虚箭头指的以及用实箭头指的，就是两组循环轨道的定点. 以此类推，当 p 为质数时，循环轨道的数目 N^p 有：

$$N_p = \frac{2^p - 2}{p}. \tag{2.18}$$

若 p 不是质数，则 p 可以分解因子，循环轨道中包含了原来是因子的循环轨道. 例如 $p=4$ 的情况，0101 必然与 01 是相同的循环，1010 必然是与 10 是相同的循环等，情况就要复杂得多.

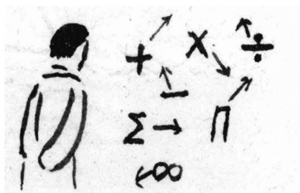
随着 p 的增加，N_p 增加得很快. 例如：$N_{11}=186$，$N_{13}=630$，$N_{17}=7710$. 因而映射到达的点几乎弥漫了 0→1 的所有值.

3. 符号动力学

上面一节，我们介绍了虫口模型，对虫口模型方程式

$$x_{n+1} = \gamma x_n(1 - x_n) \equiv f(x_n) \qquad (3.1)$$

作了直观的研究. 大致上知道了定点 x^* 随着参数 γ 的变化规律，二分岔点、四分岔点都是变化参数 γ 值后不断在计算机上迭代得出的结果. 这样做虽然直观，但比较繁琐，而且知其然不知其所以然. 我国研究混沌的学者郝柏林与



符号动力学？难道符号也会运动？

郑伟谋先生将符号动力学用于研究虫口模型[10,11]，得出一系列有意思的结果.

"什么！符号动力学！难道符号也会运动？"

如图 3.1 所示，曲线代表虫口模型映射函数 $f(x)$，横坐标轴上的数码 1,2,3,4,5 代表 x_1，x_2，x_3，x_4，x_5. 即以 x_1 代入(3.1)式，得出的结果是 x_2，以此类推. 这个映射过程在图上可以形象地用箭头表示. 现在从曲线的最高点引一条虚线把图形分成左右两部分，凡是落在右边的点都用 R 表示，落在左边的点都用 L 表示. 这样一来，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5 就简化为 RLRLR 了. 我们要记住，当我们看到一组符号时，譬如 RLR…，这说明了初始位置在右边，经一次映射后到了左边，再经一次映射后到了右边等等.

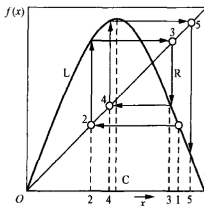


图　3.1

"这样不是太不准确了吗？"

把不同的 x_1，x_3，x_5 都用 R 表示，不同值的 x_2，x_4 都

用 L 表示，的确是变粗放了. 但是问题变简单了，经(3.1)映射的值只有三个了，R(右边)，L(左边)，C(中间).

我们比较感兴趣的是周期轨道，在符号动力学中，周期轨道的表达方法变得很简单明了，例如有这样一个 5 周期轨道：RLRRL，5 个值的不断重复可以写成：

$$\text{RLRRL RLRRL RLRRL}\cdots \equiv (\text{RLRRL})^{\infty}. \quad (3.2)$$

数学上对(3.1)式的一次迭代，在符号动力学中就是对符号系列的一次“移位”，对(3.2)符号系列的一次移位就成为：

$$\text{LRRLR LRRLR LRRLR}\cdots \equiv (\text{LRRLR})^{\infty}. \quad (3.3)$$

我们还可以看到，对循环轨道的一次移位(方程式的一次迭代或映射)也即将第一个字符移到括号中的最后去就是了. 例如我们可以把上面的 5 周期轨道经过四次移位分别得：

(1)$(\text{RLRRL})^{\infty}$；(2)$(\text{LRRLR})^{\infty}$；(3)$(\text{RRLRL})^{\infty}$；(4)$(\text{RLRLR})^{\infty}$；(5)$(\text{LRLRR})^{\infty}$.

我们可以看到对一个符号序列来说，第一个字母是运动起始点的位置，是很重要的. 但符号系列只告诉我们在左边还是右边，并没有告诉我们具体位置. 从它本身以及后面的符号我们可以比较不同的符号系列中，哪一个的初始位置比较大. 例如，最简单的符号系列有一个字母组成，如 R，C，L 三个系列，很清楚，R 的初始位置最大，L 的初始位置最小，即有：

$$\text{R} > \text{C} > \text{L}. \quad (3.4)$$

如有两个字母组成的系列,如 RR,RL,LR,LL,则如何来比较初始位置那个大?第一个字母是 R 的必然比第一个字母是 L 的要大,因为右边的 x 值显然比左边的 x 值要大.但 LR 与 LL 比较呢?第一个字母都是 L,曲线左边的斜率是正的,简单说是升函数,即 x_1 越大,经映射后的 x_2 越大.如图 3.2 所示,1 点具有比 2 点小的 L 值,1 点经映射后的值由 1′点的纵坐标表示,2 点经映射后的值以 2′点的纵坐标表示.

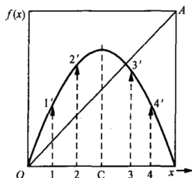


图 3.2

"如何知道 1′点与 2′点对应的 x 值?"

别忘了,只要在 1′点与 2′点引一与 x 轴平行的线与 45°斜线 OA 相交,交点的横坐标就是映射后的 x 值.显然 2′点的 x 值已经在 R 区域了,而 1′点的 x 值还在 L 区.因而有:

$$\text{LR} > \text{LL}. \tag{3.5}$$

现在来比较 RR 与 RL,大家看,这两个符号系列的初

始位置哪个大?

"恐怕 RR 比 RL 大吧?"

要注意,曲线右边与左边的情形有很大不同,右边曲线的斜率是负的,简单说是个降函数. 从图 3.2 可以很清楚地看出,3 点比 4 点的 x 小,经映射后 3′点的 x 却比 4′点的 x 要大. 前者仍在 R 区域,后者却到了 L 区域. 因而有:

$$\mathrm{RR} < \mathrm{RL}. \tag{3.6}$$

假如有两个比较长的符号系列 ΣR 与 ΣL,其中 Σ 代表一连串 R 与 L 的组合,常称为字头,要比较两个字头相同的符号系列初始位置的大小,首先要看字头 Σ 是升函数还是降函数.

"Σ 已经是很复杂的一串字符了,如何来判断它是升函数还是降函数?"

不要着急. 从 x_1 迭代一次到 x_2,其斜率为 $\mathrm{d}x_2/\mathrm{d}x_1$,从 x_1 迭代 n 次到 x_n,其斜率为:

$$\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_1} = \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}x_1}\frac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}x_2}\frac{\mathrm{d}x_4}{\mathrm{d}x_3}\cdots\frac{\mathrm{d}x_n}{\mathrm{d}x_{n-1}}, \tag{3.7}$$

即 Σ 的斜率为其中各次映射的斜率的乘积. 现在我们并不要知道这乘积的大小,只要知道这乘积的正负就是了. Σ 为一串符号 L 和 R,L 的斜率是正的,R 的斜率是负的,负负得正. 因而若 Σ 中有奇数个 R,则 Σ 为降函数,若 Σ 中有偶数个 R,则为升函数. 有了这个原则,我们就可以比较任何两

个符号系列的初始位置的大小了.

现在来比较(3.3)式的5周期序列经移位后的5种不同情况的大小.

(1)$(RLRRL)^{\infty}$;(2)$(LRRLR)^{\infty}$;(3)$(RRLRL)^{\infty}$;(4)$(RLRLR)^{\infty}$;(5)$(LRLRR)^{\infty}$.

首先(1)、(3)、(4)是R为头,(2)、(5)是L为头,显然有:

$$(1)(3)(4)>(2)(5).$$

(2)与(5)比较,有公共字头LR,字头中R只有一个,因而LR是一个降函数,(2)在字头后跟的是R,而(5)在字头后跟的是L,降函数字头后跟的越小,字头的初始位置越大,这样就得:

$$(5)>(2).$$

比较(1)、(3)、(4)公共字头为R,为降函数,故有:

$$(1)、(4)>(3).$$

比较(1)、(4)有公共字头RLR,有两个R,是一个升函数,因而有:

$$(1)>(4).$$

将这5个5周期符号系列按初始位置的大小排起来就有:

(1)$(RLRRL)^{\infty}>$(4)$(RLRLR)^{\infty}>$(3)$(RRLRL)^{\infty}>$(5)$(LRLRR)^{\infty}>$(2)$(LRRLR)^{\infty}$

在符号动力学中,比较有趣的是从C点开始的周期循环.在上一节讨论中我们知道,通过C点的循环轨道称为

超稳定轨道.当然,最简单的超稳定轨道为 C^∞,也就是 C 点为定点,如图 3.3 所示.其次为 $C(RC)^\infty$,如图 3.4 所示.

"C^∞ 与 $C(RC)^\infty$ 是完全不同的 $f(x)$ 图?"

是的.不同的超稳定循环轨道只能在不同的 $f(x)$ 曲线下获得,换句话说,由不同的参数 γ 得到.图 3.3 中曲线只能有 C^∞ 超稳定循环轨道,图 3.4 中曲线只能有 $C(RC)^\infty$ 超稳定循环轨道.若 C 点的高度等于 1,也就是说以 C 的值代入(3.1)式后结果为 1,则得到 CRL^∞ 这样的超稳定轨道,如图 3.5 所示.

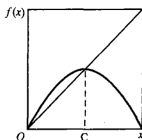


图 3.3

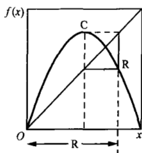


图 3.4

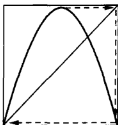


图 3.5

“这样的轨道相应的参数 γ 是多大呢?”

可以从(3.1)式计算出来. 因 C 对应的 x 值为 0.5,代入(3.1)式即得:

$$1 = \gamma C(1 - C) = 0.25\gamma, \quad 得 \gamma \to 4. \qquad (3.8)$$

由于超稳定轨道起点都是 C,后面是包括 C 的一系列符号的循环,因而对这样的轨道,可以简单地这样写:

C^{∞} 简写为 C,

$C(RC)^{\infty}$ 简写为 RC,

CRL^{∞} 简写为 RL^{∞}, 依此类推.

“不同的参量 γ 有不同的超稳定循环轨道,那到底有多少超循环轨道呢?”

有一个办法可以找出在一定范围内,有多少超稳定循环轨道来. 例如我们要找比 RL^3C 起点小的超稳定循环轨道有哪些,可以这样来找. 要记住,所谓的大小是指第一个字符 R 所处的 x 坐标的大小.

比 RL^3C 小而最接近它的为$(RL^3R)^{\infty}$,

"为什么呀?"

别忘记 RL^3C 与 $(RL^3R)^\infty$ 具有相同的字头 RL^3,而且是降函数,跟在字头后的 R 比 C 大,因而 $(RL^3R)^\infty$ 比 RL^3C 小. 比 RC 大而最接近它的为 $(RL)^\infty$.

"为什么要用 RC 呀?"

因为 RC 与 RL^3C 有共同的字头 R,当然是降函数,跟在字头后的 C 比 L 大,因而 RC 是一个比 RL^3C 小而又简单的轨道,现在就来找 RC 与 RL^3C 之间有没有超循环轨道. 列出不等式有:

$$RC < (RL)^\infty < (RL^3R)^\infty < RL^3C.$$

中间的两个序列有相同的字头 RL,则必然有一个超稳定循环轨道 RLC,实际上是 $(RLC)^\infty$. 再比较 RC 与 RLC,有

$$RC < (RL)^\infty < (RLR)^\infty < RLC.$$

中间两序列的共同字头为 RLR,必然有一个超稳定循环轨道 RLRC,实际上是 $(RLRC)^\infty$.

再比较 RC 与 RLRC,有

$$RC < (RL)^\infty < (RLRL)^\infty < RLRC.$$

中间两序列是同一个循环轨道 $(RL)^\infty$,说明 RC 与 RLRC 的中间已经不可能有别的超稳定循环轨道了.

比较 RLC 与 RL^3C 之间,有

$$RLC < (RLL)^\infty < (RL^3R)^\infty < RL^3C.$$

中间两序列的共同字头为 RLL,则有一个超稳定循环轨道

RLLC，实际上是(RLLC)$^{\infty}$.

用这办法可以把所有的超稳定循环轨道的符号系列找出来.

“不同的超稳定循环轨道对应于不同的映射方程式的参量，能从符号系列找出参量来吗？”

为了达到这个目的，我们把映射方程式作一下变数变换，为此引(3.1)式如下：

$$x_{n+1}=\gamma x_n(1-x_n)\equiv f(x_n). \tag{3.1}$$

令

$$y=\frac{4x-2}{\gamma-2}, \quad 即 \quad x=\frac{(\gamma-2)y+2}{4}. \tag{3.9}$$

代入(3.1)式得：

$$\frac{(\gamma-2)y_{n+1}+2}{4}=\gamma\frac{(\gamma-2)y_n+2}{4}\left[1-\frac{(\gamma-2)y_n+2}{4}\right].$$

经整理后得：

$$y_{n+1}=1-\mu y_n^2\equiv g(y_n), \tag{3.10}$$

其中

$$\mu=\frac{\gamma(\gamma-2)}{4}. \tag{3.11}$$

(3.1)式的曲线最高点C在$x=0.5$处，(3.10)式曲线的最高点C在$y=0$处，从(3.8)式知，γ的变化范围为$0\to4$，则从(3.11)式知，μ的变化范围为$0\to2$. x的变化范围为$0\to1$，从(3.9)式知，y的变化范围为$-1\to1$. 利用(3.10)式计算给定的超稳定循环轨道相应的μ值，也就得出(3.1)

式中的 γ 值.作为一个例子,我们来计算超稳定循环轨道 $CRLR^2C$ 的 μ 值.

从(3.10)式有:

$$\mu y_n^2 = 1 - y_{n+1}$$

$$\Longrightarrow y_n = \pm\sqrt{\frac{1-y_{n+1}}{\mu}} = \pm\sqrt{\mu^{-1}(1-y_{n+1})}. \tag{3.12}$$

(3.12)式告诉我们,若已经知道了第 $n+1$ 次映射后的值 y_{n+1},来推测 n 次映射的值 y_n 时,同一个 y_{n+1} 值,可以有两种情况,一种是 y_n 在 R 区,一种是 y_n 在 L 区,如图 3.6 所示,分别以(3.12)式中的正负号表达.现在利用一串字符 $CRLR^2C$ 来写出其表达的数学过程.第一个字母 C 表示其函数值为 $f(C)=1$ 相当于 y_1,它由一串字符 RLR^2C 所代表的 y_2 用(3.12)式求得,因第一个字符为 R,表示在右边,式中取正号;而 y_2 又由一串字符 LR^2C 所代表的 y_3 用(3.12)式求得,因第一个字符为 L,故式中取负号;以此类推,y_3 由一串字符 R^2C 所代表的 y_4 求得,y_4 由 RC 所代表的 y_5 求得,而 y_5 由 C 所代表的 y_6 求得;而 C 点所在的位置为 0,把以上的过程写成方程式就得:

$$1 = \sqrt{\mu^{-1}(1+\sqrt{\mu^{-1}(1-\sqrt{\mu^{-1}(1-\mu^{-1})}\,)}\,)}.$$

等式两边乘以 μ 得:

$$\mu = \sqrt{\mu + \sqrt{\mu - \sqrt{\mu - \sqrt{\mu}}}}. \tag{3.13}$$

计算得 $\mu=1.625\,413\,725$.用这办法可以计算任何我们感

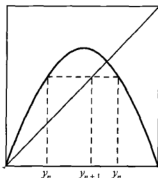


图　3.6

兴趣的超稳定轨道相应的 μ 值.

现在我们来看看,以 C 点为初始点,经 1,2,3 以及多次映射后 y_n 值随 μ 变化的规律.由于把 y_n 作为 μ 的函数,为了明确起见,以 $P_n(\mu)$来代表 y_n,则(3.10)式成为:

$$P_{n+1}(\mu) = 1 - \mu P(\mu)_n^2, \qquad (3.14)$$

显然有:

$$P_0(\mu) = \mathrm{C} = 0, \quad P_1(\mu) = 1, \quad P_2(\mu) = 1 - \mu.$$

继续用(3.10)式迭代得:

$$P_3(\mu) = 1 - \mu(1-\mu)^2 = 1 - \mu + 2\mu^2 - \mu^3,$$

$$P_4(\mu) = 1 - \mu(P_3(\mu))^2 = 1 - \mu + 2\mu^2 - 5\mu^3 + 6\mu^4 - 6\mu^5 + 4\mu^6 - \mu^7,$$

$$P_5(\mu) = 1 - \mu + 2\mu^2 - 5\mu^3 + 14\mu^4 - 26\mu^5 + 44\mu^6 - 69\mu^7 + 94\mu^8 - 114\mu^9 + 116\mu^{10} - 94\mu^{11} + 60\mu^{12} - 28\mu^{13} + 8\mu^{14} - \mu^{15},$$

…

以 μ 为横坐标,函数 P 为纵坐标画出图,如图 3.7 所

示. 可以看出, $P_0(\mu)=0$, $P_1(\mu)=1$ 与 $P_2(\mu)=1-\mu$ 是三条界线,图中分别为 CD, AB, AE 三条直线. 除上述三条特殊直线外,图中画了从 $P_3(\mu)$ 到 $P_9(\mu)$ 共 7 条曲线. 可以看到这些曲线全包围在 AB 与 AE 之间,碰到这两直线时就转弯,也就是说,有:

$$1 \geqslant P_n(\mu) \geqslant 1-\mu, \quad n=3,4,5,\cdots.$$

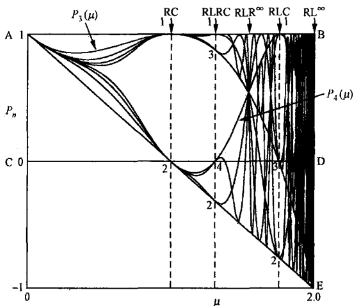


图 3.7 (取自文献[11])

图中用箭头指出的 $P_3(\mu)$ 曲线是一条最简单的曲线,只转了两次弯,也就是说一个极小与一个极大,从 $P_3(\mu)$ 的曲线方程不难计算出这两个极小与极大分别在:

极小: $\mu=1/3$, $P=0.81581$;

极大: $\mu=1$, $P=1$ 处.

另一条简单曲线为 $P_4(\mu)$,在图中也用箭头指出,这条

曲线在 μ 小于 2 的范围内也只有一个极大与一个极小，用简单数字计算，不难找出极小与极大的位置分别在：

$$极小：\mu = 1.1661,\quad P_4 = -0.092\,776,$$

$$极大：\mu = 1.7548,\quad P_4 = 1.$$

图 3.8 为方程(3.10)的分岔图，与上一节中的图 2.5 是一样的，只不过图 2.5 是用方程(3.1)画的，状态变量为 x，参数为 γ. 而图 3.8 是经过了变数变换，状态变量为 y，参数为 μ 而已. 比较图 3.7 与图 3.8，大家看出什么了？

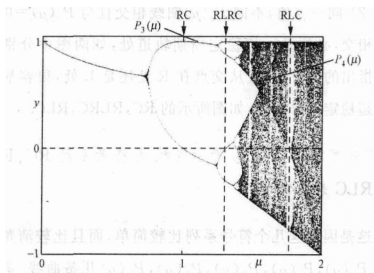


图 3.8 （取自文献[11]）

"两个图很像，但图 3.8 中的一条线在图 3.7 中却是很多条！"

当然，两个图虽来源于同一个映射方程式(3.10)，但要注意的是，图 3.7 是从 C 点开始后每次映射后的位置 $P_n(\mu)$ 随 μ 的变化；而图 3.8 是映射后的定点随 μ 的变化，

不是定点的值在图 3.8 中是不出现的，当某些 μ 只有一个定点时，当然只有一条线. 同样不在曲线 $P_n(\mu)$ 上的值在图 3.7 中也是不出现的. 比较图 3.7 与图 3.8，我们可以看到：

(1) 图 3.8 中隐隐约约出现的黑线，就是图 3.7 中的线，特别是 $P_3(\mu)$ 线与 $P_4(\mu)$ 线，可以看得很清楚. 由于 $P_n(\mu)$ 都是由从 C 点出发经映射的点组成，而 C 点是一超稳定点，是 f 曲线的极大点，不同的点在这里密集，映射后形成黑线也是不难理解的.

(2) 同一 μ 值，不同 $P_n(\mu)$ 曲线相交且与 $P_0(\mu)=0$ 的横线相交，必然是一超稳定周期轨道处，如两图中分别用虚线指出的地方. 而且从交点在 R 处还是 L 处，很容易写出其超稳定符号系列，如图所示的 RC，RLRC，RLC.

"如何就那么容易看出超稳定符号系列 RC，RLRC，RLC 来了？"

这是因为这几个符号系列比较简单，而且比较清楚看出了 $P_0(\mu)$，$P_1(\mu)$，$P_2(\mu)$，$P_3(\mu)$，$P_4(\mu)$ 几条曲线. 第一次、第二次……映射后的位置在图 3.7 中以 1，2，3，4 等数字表明. 这些超稳定周期轨道的相应 μ 值，计算如下：

RC：μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu},\quad 得\quad \mu=1.$$

RLRC：μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}},\quad 得\quad \mu=1.3107.$$

RLC：μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu}},\quad \text{得}\quad \mu=1.754.$$

"它们中间还有超稳定轨道吗?"

我们可以用前面介绍的办法来看看 RLRC 与 RLC 之间有没有超稳定轨道. 首先要看看这两个轨道的起点哪个大? 它们有共同的字头 RL，是降字头，故 RLC 比 RLRC 大. 比 RLC 小而最接近的轨道为 $(\mathrm{RLR})^{\infty}$，比 RLRC 大而最接近的轨道为 $(\mathrm{RLRR})^{\infty}$；即：

$$\mathrm{RLRC}<(\mathrm{RLRR})^{\infty}<(\mathrm{RLR})^{\infty}<\mathrm{RLC}.$$

显然有共同的字头为 RLRR，因而有一个超稳定轨道为：RLRRC，μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}},\quad \mu=1.625\,413.$$

再看在 RLRRC 与 RLC 之间，

$$\mathrm{RLRRC}<(\mathrm{RLRRL})^{\infty}<(\mathrm{RLR})^{\infty}<\mathrm{RLC},$$

有共同字头 RLRRLR，因而有超稳定轨道 RLRRLRC. μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}}}},$$

计算得 $\mu=1.674\,066$.

在 RLRRLRC 与 RLC 之间，

$$\mathrm{RLRRLRC}<(\mathrm{RLRRLRR})^{\infty}<(\mathrm{RLR})^{\infty}<\mathrm{RLC},$$

共同字头为 RLRRLRR，因而有超稳定轨道 RLRRLRRC

$=RLR^2LR^2C$. μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}}}}},$$

计算得 $\mu=1.711\,079$.

在 RLRC 与 RLRRC 之间有：

$RLRC<(RLRR)^{\infty}<(RLRRR)^{\infty}<RLRRC$,

得共同字头为 RLRRR，故有超稳定轨道 $RLRRRC=RLR^3C$. μ 服从的方程式为

$$\mu=\sqrt{\mu+\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu-\sqrt{\mu}}}}},$$

计算得 $\mu=1.476\,014$.

我们可以将这些 μ 值代入(3.10)式，看其映射结果如何：

RC：$\mu=1$，$y_n=0, 1, 0, 1, \cdots$ 二周期循环.

RLRC：$\mu=1.3107$，$y_n=0, 1, -0.3107, 0.873\,472, 0, 1, \cdots$ 四周期循环.

RLR^3C：$\mu=1.476\,014$，$y_n=0, 1, -0.476\,014, 0.665\,55, 0.346\,188, 0.823\,106, 0, 1, \cdots$ 六周期循环.

RLRRC：$\mu=1.625\,413$，$y_n=0, 1, -0.625\,413, 0.364\,234, 0.784\,362, 0, \cdots$ 五周期循环.

RLC：$\mu=1.754$，$y_n=0, 1, -0.754, 0, 1, -0.754, \cdots$ 三周期循环.

依此类推.

“符号系列的大小是用第一个字母所在位置的大小来标志，现在第一个字母所在的位置都是1，如何看出它们的大小？”

问得好！要注意，符号系列的大小用第一个字母的位置来标志，是对映射方程式(3.1)而定的，即是 x 的位置，而不是用(3.10)式的 y. 利用(3.9)与(3.11)将 y 转换成 x，符号系列的大小就一目了然了.

从图3.7与图3.8可以看出，超稳定周期轨道所在处图中出现孔隙，也就是所谓出现了窗户. 不难理解，超稳定轨道附近的点，因为不稳定很容易向超稳定轨道靠拢，出现空隙是很自然的.

(3) 在图3.7中，我们还看到在 $P_3(\mu)$ 与 $P_4(\mu)$ 的交点处，所有的轨道都在这里相交. 从 $P_3(\mu)$ 与 $P_4(\mu)$ 的方程式，可以得到交点的 μ 值.

从

$$P_3(\mu) = P_4(\mu)$$

得方程：

$$\mu^4 - 4\mu^3 + 6\mu^2 - 6\mu + 4 = 0.$$

计算得：

$$\mu = 1.54369.$$

用这个 μ 值来作(3.10)式的迭代得一串结果如下：

$$y_n = 0, 1, -0.54369, 0.54369, 0.54369, \cdots,$$

也就是说，当 $y_3 = 0.54369$ 后，后面的均为这个数不变了.

用符号系列来表示，就是 $CRLR^{\infty}$，一般可以不写第一个 C，因而在图 3.7 中以 RLR^{∞} 标志.

符号动力学还可以用来研究其他系统，得到一些感兴趣的结果，我们就不多介绍了.

4. 奇怪吸引子

这里我们来比较详细介绍奇怪吸引子问题.

"吸引子? 还要奇怪?"

在前面,我们讲到洛伦茨用三个方程和三个变量,描述了一个复杂系统的运动.若在三维空间来画出三变量系统的轨迹,得到著名的洛伦茨吸引子.吸引子是研究混沌很重要的一个概念,首先要把吸引子的概念弄清楚.



对这些昆虫来说,这里好像是一个奇怪吸引子.

要把吸引子说清楚,必须从动力学方程说起.

设一动力学系统由 N 个坐标来描述,这 N 个坐标分别为:

$$x_1, x_2, \cdots, x_N,$$

其动力学方程式可以写成:

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t} = F_1(x_1, x_2, \cdots, x_N), \\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t} = F_2(x_1, x_2, \cdots, x_N), \\ \vdots \\ \frac{\mathrm{d}x_N}{\mathrm{d}t} = F_N(x_1, x_2, \cdots, x_N). \end{cases} \tag{4.1}$$

上面的一系列公式可以简单地用一个公式表示:

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t} = \boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}), \tag{4.2}$$

这里 $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{F}$ 为 N 维相空间的矢量,其分量分别为:$x_1, x_2, \cdots, x_N$ 与 $F_1, F_2, \cdots, F_N$.

“N 维的相空间? 几何空间不只有三维吗?”

几何图上能画出来的只有三维,但可以把三维的空间抽象地推广到任意多维.假如把速度也视为如同位置一样作为坐标而组成空间,三维运动的质点就成为六维了.这种多维的抽象空间在物理学上称为“相空间”.

"动力学方程不就是牛顿第二定律吗? 就是物体的质量乘物体的加速度等于物体所受的力! 怎么(4.1)、(4.2)中没有加速度,也没有力?"

其实是相同的,不过表现得更一般化就是了.就以大家都熟悉的阻尼振动作为例子吧,阻尼振动的运动方程式可以写成为:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+\nu\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega^2 y=0, \tag{4.3}$$

第一项为加速度项;第二项为阻尼力项,ν 为阻尼系数;第三项为弹性力项,ω 为振子振动频率.若没有第二项的阻尼,(4.3)式就为一谐振动方程.现在来作变数变换,令:

$$x_1=y,\quad x_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{4.4}$$

则(4.3)成为:

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\[2ex] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-\nu x_2-\omega^2 x_1.\end{cases} \tag{4.5}$$

(4.5)式就是(4.1)式中 $N=2$ 的情况.

"把运动方程写成(4.1)式的样子有什么好处呢?"

看阻尼振动这具体例子,y 是坐标,$\mathrm{d}y/\mathrm{d}t$ 是速度,现在转变成为 x_1,x_2,都变成了同样地位的相空间坐标,运动成为系统的代表点在相空间的运动.对方程组(4.5),很容

易从计算机上用数字解法解出 x_1，x_2 随时间 t 的变化规律. 取 Δt 为微小的时间间隔，将(4.5)式近似写成：

$$\begin{cases}\Delta x_1 = x_2 \Delta t, \\ \Delta x_2 = -(\nu x_2 + \omega^2 x_1)\Delta t,\end{cases} \tag{4.6}$$

即

$$\begin{cases}x_1' = x_1 + x_2 \Delta t, \\ x_2' = x_2 - (\nu x_2 + \omega^2 x_1)\Delta t,\end{cases}$$

x_1'，x_2' 为经时间 Δt 后的 x_1，x_2 值. 从(4.5)式到(4.6)式，实际上就是从连续的运动方程转换成不连续的映射方程. 选取恰当的 ν 与 ω，就可以运用计算机从 $t=0$ 开始，计算 x_1，x_2 在相空间的轨道，如图 4.1 所示(注意图中的 $x^{(1)}$，$x^{(2)}$ 即 x_1，x_2).

"最后轨道要趋向零了！"

这就是大家都熟悉的阻尼运动的规律. 从(4.4)式知道，这两个相坐标一个是位置，一个是速度，阻尼运动最后位置与速度都趋向零，是必然的. 我们把系统最后趋向的一点，称为吸引子. 图 4.1 的坐标原点就是方程(4.5)的吸引子.

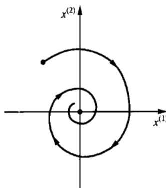


图 4.1 (取自文献[1])

"吸引子都是一个点吗?"

不是.我们再来看下面的运动方程式:

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2}+(y^2-\eta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}+\omega^2 y=0, \tag{4.7}$$

这个方程式称为 van der Pol 方程.我们仍作(4.4)式的变换,即令:$x_1=y$, $x_2=\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}$,则(4.7)式成为:

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=x_2,\\ \frac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=(\eta-x_1^2)x_2-\omega^2 x_1.\end{cases} \tag{4.8}$$

同样,选取恰当的 ω 与 η,微小的时间区间 Δt,将(4.8)式变成不连续的映射方程式:

$$\begin{cases}x_1'=x_1+x_2\Delta t,\\ x_2'=x_2+[(\eta-x_1^2)x_2-\omega^2 x_1]\Delta t.\end{cases} \tag{4.9}$$

计算结果,其轨道近似如图 4.2 所示(这图画得比较理想).也就是说,轨道向一闭合曲线靠近,这闭合曲线在图中以虚线表示.若初始点在该曲线外面,如图中 α 点,则最后靠近在闭合曲线外面;如初始点在闭合曲线内部,则最后靠近在闭合曲线内部.这固定曲线就是该运动的吸引子.

"吸引子可以是一个点,又可以是一条闭合曲线,还可以是其他形状吗?"

可以.前面我们提到过洛伦茨吸引子,就是一个很奇怪的图形.洛伦茨用一个简化模型来研究气流的运动,这

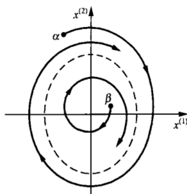


图 4.2 (取自文献[1])

个模型只保留三个变量：x_1，为速度的第一级谐振展开的振幅；x_2，为温度的第一级谐振展开的振幅；x_3，为温度涨落谐振的第零级振幅.有：

$$\begin{cases}\dfrac{\mathrm{d}x_1}{\mathrm{d}t}=\sigma(x_2-x_1),\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_2}{\mathrm{d}t}=-x_1x_3+rx_1-x_2,\\[2mm] \dfrac{\mathrm{d}x_3}{\mathrm{d}t}=x_1x_2-\beta x_3,\end{cases}\tag{4.10}$$

式中 σ,r,β 为常数，洛伦茨取 $\sigma=10,\beta=8/3,r=28$.汉诺与他的合作者(M. Hénon，Y. Pomeau)[4]对(4.10)式作了数字计算.让 σ,β 保持洛伦茨的数值，而让 r 作变化，发现洛伦茨系统在 $r=220$ 附近，有着很明显的变化.在 r 比 220 大时，轨道具有普通的吸引子的性质，即为三维空间的曲线.在 r 比 220 小时，轨道成为奇怪吸引子.如图 4.3 为 $r=230$ 时的吸引子，图 4.4 为 $r=210$ 时的吸引子.这两个图都是分别在 x_1-x_2 与 x_3-x_2 平面上的投影图.

若吸引子是简单的几何图形，维数都是整数，而且一

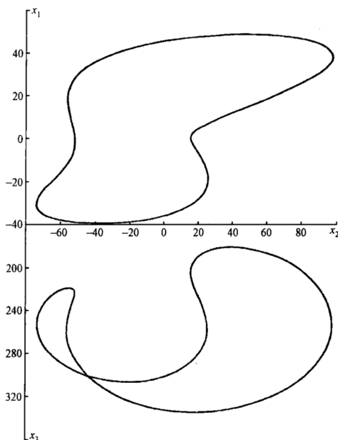


图 4.3　$r=230$(取自文献[4])

目了然，这种吸引子是普通吸引子. 若吸引子是一些复杂图形，维数是分数，这种吸引子称为奇怪吸引子. 洛伦茨吸引子就是首先发现的奇怪吸引子.

"什么是分数的维数?"

分数维数简称分维，分维的问题在后面我们将比较详细介绍.

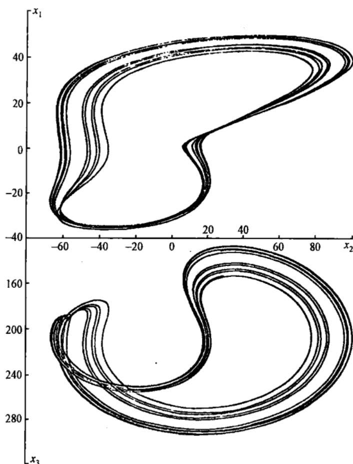


图 4.4 $r=210$(取自文献[4])

"除了洛伦茨吸引子外,还有其他奇怪吸引子吗?"

前已提到过的米契尔·汉诺(Michel Hénon)在研究了洛伦茨吸引子后,为了更简单地了解奇怪吸引子的性质,提出了一个比较简单而著名的奇怪吸引子,也就是汉诺吸引子.比洛伦茨只年轻几岁的米契尔·汉诺,于 1931

年出生在巴黎，是法国南部海岸尼斯天文台的一个天文学家，他研究球状星团的运动规律. 1976 年，汉诺听到了一个来访的物理学家讲到洛伦茨吸引子的事，这位物理学家想要揭示洛伦茨吸引子的细微结构，但因数学上的困难而没有成功. 这个报告引起了汉诺的极大兴趣.

开始，汉诺为研究洛伦茨吸引子而画的图，是三维空间曲线在二维空间的投影. 这在技术上比较麻烦. 为了较详细地研究奇怪吸引子的性质，汉诺采用庞加莱截面技术，画出轨道在截面上的轨迹.

"什么是庞加莱截面技术?"

如图 4.5 所示，在轨道经过的三维空间中取一截面，记下轨道穿过截面的点，这是庞加莱采用过的一种方法. 通过庞加莱截面技术，就把在 N 维空间的连续运动转换成 $N-1$ 维空间的不连续的映射. 图 4.5 所示的就是 $N=3$ 的情况. 当时汉诺只能用手一点一点把计算结果画在纸上，在计算机不断进步了的现在，科学家们做同样的工作时，可以让这些与截面的交点一一出现在计算机屏幕上，像夜幕降临时远处的街灯般一盏一盏地点明起来. 汉诺吸引子的映射方程式为：

$$\begin{cases} x_{n+1} = \alpha - x_n^2 + \beta y_n, \\ y_{n+1} = x_n, \end{cases} \tag{4.11}$$

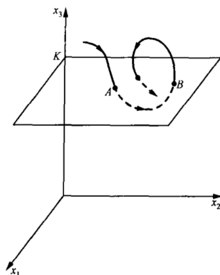


图 4.5 （取自文献[1]）

这里，$\alpha=1.4$，$\beta=0.3$；汉诺得到的轨道如图 4.6(a)所示.通常称为汉诺吸引子.若将一小部分放大来看，例如将图 4.6(a)中用长方形括出的一块放大成图 4.6(b)，则可以发现原来似乎是一条线的地方实际上是有很多线组成，再把图 4.6(b)中用长方形画出的一块放大成图 4.6(c)，则可以看到更精细的结构；仔细研究，这些线条实际上是康托尔集（关于康托尔集在后面将详细介绍），是具有分数维的奇怪吸引子.

“汉诺吸引子的方程式代表什么运动？”

汉诺写出这个方程式主要是研究吸引子的精细结构而已，并没有与它相对应的运动，也许以后会发现与它类似的具体运动.

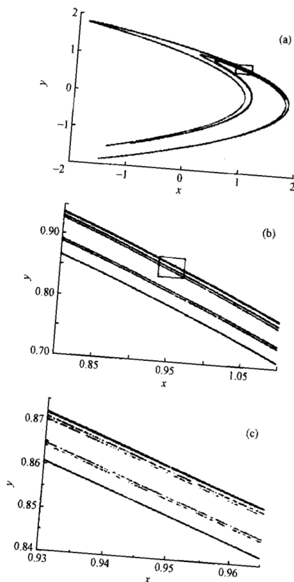


图 4.6 (取自文献[1])

"虫口模型也有吸引子吗?"

虫口模型,也就是逻辑斯谛方程也有吸引子.在一定的 γ 值时的稳定循环轨道,就是吸引子.图 2.5 中大于 γ_m

区域中的黑色部分通常称为混沌吸引子.

“知道了一个运动的吸引子有什么实际意义呢?”

这个问题我们将在下一章讨论.

5. 混沌的控制

我们研究一个系统的运动规律，目的是希望能控制它的运动. 例如研究虫口模型，知道影响生态状况的参量是γ，要这种物种能够生生不息，就要保持环境具有合理的γ值.

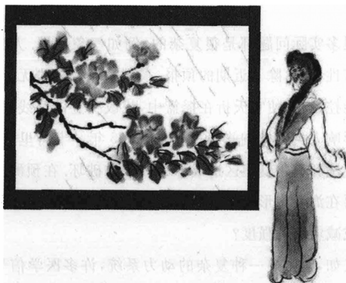
很多实际问题都是很复杂的，例如气象问题. 人们对付灾害性气象，除了近期的预报，采用逃避以外别无办法. 能不能控制它，使它夭折在摇篮中，或改变它的路线，使它向不影响人类的方向进行？例如，2005 年，“卡特里娜”飓风对美国新奥尔良地区造成那么严重的破坏. 在预测到飓风将要在海洋中形成时，能不能在上陆以前就转移它的路线？或减弱它的强度？

又如，人体是一种复杂的动力系统，许多医学信号显示出了混沌的特性. 例如心电信号，正常人的心电信号粗

看具有周期性，但仔细分析心电记录的不同部分便会发现，心跳周期存在波动，且有着许多不规则现象. 因而正常的心脏搏动不是简单的周期性运动，而是一个混沌系统的周期运动. 一旦发生病变，进入到不该去的混沌轨道，医生的职责就是使用各种手段让其回到正常的混沌轨道上来. 因而从混沌运动的角度看，医药的作用就是一种控制混沌的手段.

"要控制混沌很难吧?"

这的确是一个既难但又很吸引人的研究课题，20 世纪 90 年代起世界上很多人从事这方面的研究. 人们关心的混沌运动是各色各样的. 要控制一具体系统的混沌，必须了解该系统的性质. 认识气象中的混沌必须具备很多气象学的专业性知识，认识医学上的混沌必须具备很多医学知



在这 "乍暖还寒时候……"，如何能控制她内心的混沌?

识，认识受控热核反应中的混沌必须知道装置的结构以及等离子体的物理性质，认识激光束出现的混沌必须了解产生激光以及传播激光的规律.

“那怎么研究呀？需要那么多的专业知识！”

各种不同的系统有不同的个性，但出现混沌的系统却有它的共性. 1990 年，美国马里兰大学的 E. Ott，C. Grebogi，J. A. Yorke 提出了一种控制混沌的方法（见参考文献[7]），这种方法很快得到研究混沌的各方面人士的欢迎，被称为 OGY 方法. 这方法抓住了混沌吸引子的共同特点，就是：混沌吸引子都是由很密集的不稳定循环轨道聚集在一起形成的. 选定这些不稳定循环轨道中的一个，将这个轨道作为我们所需要的；采用外界微扰的方法，让系统能稳定到这个轨道上来，就是 OGY 方法的要点. 在这里我们来作简单介绍.

首先，要对我们所研究的系统有一个数学模型. 在计算机上运行这个模型，也就是说对我们感兴趣的数学方程式作多次的映射，并找到混沌吸引子. 在混沌吸引子中注意一些低周期的循环轨道，然后考察这些轨道并挑选一个轨道，这个轨道可以改善系统的性能. 最后我们修改我们的某个运动参数，去稳定这个我们所希望的、已经存在的轨道.

为了简化，E. Ott 等考虑一时间连续的力学系统，系统的运动方程可以写成：

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{x}}{\mathrm{d}t}=\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x},p). \tag{5.1}$$

$\boldsymbol{x}$ 具有三个自由度(维数),p 为可以被外界所控制的运动参量. 用三个自由度是为了方便,可以推广用在任意维数的情况.

"E. Ott 必须知道这个运动方程式的具体内容吧!?"

E. Ott 的理论是普适的. 并不牵涉到(5.1)这方程式的具体内容. 但是对这个系统的某个随时间变化的标量变量却可以测量(实际上是在计算机上计算),设这个变量为 z,再选取一个确定的推迟时间 T,定义 $\boldsymbol{x}$ 的三个分量为:

$$\boldsymbol{x}(t) = [z(t), z(t-T), z(t-2T)]. \tag{5.2}$$

三个分量 $z(t)$,$z(t-T)$,$z(t-2T)$ 随着时间变化. 将这三个分量组成直角坐标,则可以在这坐标系中画出一条轨道曲线. 我们采用庞加莱截面技术,取一个截面,为了方便,这个截面可以取为与某个坐标垂直,如图 5.1 所示. 记下穿过平面的位置 $\boldsymbol{\xi}_1$,$\boldsymbol{\xi}_2$,…,$\boldsymbol{\xi}_n$,…,这就是二维矢量的映射. 即

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1} = F(\boldsymbol{\xi}_n, p), \tag{5.3}$$

二维矢量为:

$$\boldsymbol{\xi}_n = [z(t_n), z(t_n - T)] \equiv [x_n, y_n]. \tag{5.4}$$

设我们选取的稳定轨道为 $p=\tilde{p}$ 的轨道,为了简单,假定这个轨道为一周期轨道,也就是一个定点. 让定点为 $\boldsymbol{\xi}_f$. 现在的问题就是,$\tilde{p}$ 轨道不稳定时,要人为地让 p 偏离 $\tilde{p}$,使轨道又回到 $\boldsymbol{\xi}_f$ 的轨道上来.

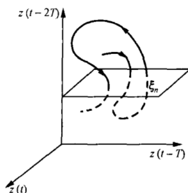


图 5.1

"这个 p 随便取吗？如何取 p 才能有效达到目的呢？"

这就是一个需要解决的问题．我们要用可以测量的量来估算 p．首先，把方程(5.3)线性化．应用(5.4)式的符号，将(5.3)式写成：

$$\begin{cases} x_{n+1} = f_1(x_n, y_n, p), \\ y_{n+1} = f_2(x_n, y_n, p), \end{cases} \tag{5.5}$$

由于在定点 ξ_f 附近作微小变化，将(5.5)等式右边的函数展开为泰勒级数，只取最低阶得：

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_f(p) + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_f (x_n - x_f(p)) \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial f_1}{\partial y_n}\right)_f (y_n - y_f(p)), \\ y_{n+1} = y_f(p) + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_f (x_n - x_f(p)) \\ \qquad + \left(\dfrac{\partial f_2}{\partial y_n}\right)_f (y_n - y_f(p)), \end{cases} \tag{5.6a}$$

即为：

$$\boldsymbol{\xi}_{n+1}-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{f}}(p)=M(\boldsymbol{\xi}_n-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{f}}(p)), \qquad (5.6\mathrm{b})$$

其中 $\boldsymbol{M}$ 为 2×2 的矩阵：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\left(\frac{\partial f_1}{\partial x_n}\right)_{\mathrm{f}} & \left(\frac{\partial f_1}{\partial y_n}\right)_{\mathrm{f}}\\ \left(\frac{\partial f_2}{\partial x_n}\right)_{\mathrm{f}} & \left(\frac{\partial f_2}{\partial y_n}\right)_{\mathrm{f}}\end{bmatrix}\equiv\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}, \qquad (5.7\mathrm{a})$$

将矢量写成矩阵形式：

$$(\boldsymbol{\xi}_n-\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{f}}(p))=\begin{bmatrix}x_n-x_{\mathrm{f}}(p)\\ y_n-y_{\mathrm{f}}(p)\end{bmatrix}, \qquad (5.7\mathrm{b})$$

(5.6a)或(5.6b)即成：

$$\begin{bmatrix}x_{n+1}-x_{\mathrm{f}}(p)\\ y_{n+1}-y_{\mathrm{f}}(p)\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_n-x_{\mathrm{f}}(p)\\ y_n-y_{\mathrm{f}}(p)\end{bmatrix}. \qquad (5.8)$$

"矩阵 $\boldsymbol{M}$ 可以具体确定吗？"

可以. 定点 $x_{\mathrm{f}}, y_{\mathrm{f}}$ 是已知的(自己选定的). 从所研究的系统的数学模型在定点附近选出一定量的 x_n, x_{n+1} 以及 y_n, y_{n+1} 后，可以把矩阵 $\boldsymbol{M}$ 中的矩阵元都计算出来. 陆同兴先生用一个单摆混沌模型，在计算机上运行足够的次数，找出了所需要的定点[7]. 他找出的定点坐标为：

$$x_{\mathrm{f}}=1.523, \quad y_{\mathrm{f}}=-0.415,$$

并从映射多次得到的 $x_n-x_{\mathrm{f}}, y_n-y_{\mathrm{f}}$ 等值计算出 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ 来为：

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}-3.42 & -5.79\\ -1.52 & -2.48\end{bmatrix}.$$

设 λ_s,λ_u 为 2×2 矩阵的特征值，也就是说 λ_s,λ_u 是下述行列式的解：

$$\begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda \end{vmatrix} = (a_{11}-\lambda)(a_{22}-\lambda) - a_{12}a_{21} = 0.$$

上式改写为

$$\lambda^2 - T\lambda + \Delta = 0, \tag{5.9}$$

这里

$$T \equiv a_{11} + a_{22}, \quad \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}, \tag{5.10}$$

解得

$$\lambda = \frac{1}{2}\{T \pm \sqrt{T^2 - 4\Delta}\}.$$

分别以 λ_s 与 λ_u 表示这两个解（特征值），我们设 $|\lambda_s|<1$，$|\lambda_u|>1$，前者为稳定解，后者为不稳定解. 用 $\hat{e}_s$ 与 $\hat{e}_u$ 分别代表稳定与不稳定变动的两个方向特征矢量，也就是说，

$$\boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{e}}_s = \lambda_s\hat{\boldsymbol{e}}_s, \quad \boldsymbol{M}\hat{\boldsymbol{e}}_u = \lambda_u\hat{\boldsymbol{e}}_u. \tag{5.11}$$

"特征矢量可以计算出来吗？怎样计算呢？"

以 e_{s1}, e_{s2} 代表特征矢量 $\hat{e}_s$ 的两个分量，则(5.11)中的第一式为如下的二元齐次方程组：

$$\begin{cases} a_{11}e_{s1} + a_{12}e_{s2} = \lambda_s e_{s1}, \\ a_{21}e_{s1} + a_{22}e_{s2} = \lambda_s e_{s2}, \end{cases}$$

解得

$$e_{s2} = \frac{\lambda_s - a_{11}}{a_{12}} e_{s1}.$$

即 e_{s1}，e_{s2} 的解是不确定的，即随便给一个 e_{s1} 值，就能得一个 e_{s2} 值. 但加上一个归一化条件，本征矢量的值就固定了，即从

$$e_{s1}^2 + e_{s2}^2 = 1,$$

得

$$\begin{cases} e_{s1} = \sqrt{\dfrac{1}{1+[(\lambda_s - a_{11})/a_{12}]^2}}, \\ e_{s2} = \sqrt{\dfrac{1}{1+[a_{12}/(\lambda_s - a_{11})]^2}}. \end{cases} \tag{5.12}$$

这样就得 e_{s1}，e_{s2} 的值. 同样可以得到 e_{u1}，e_{u2} 的值. 只要将上式中的 λ_s 换成 λ_u 就行了.

令 $\hat{\boldsymbol{E}}_s$，$\hat{\boldsymbol{E}}_u$ 分别代表与 $\hat{\boldsymbol{e}}_s$，$\hat{\boldsymbol{e}}_u$ 双正交归一化的矢量. 即：

$$\begin{cases} \hat{\boldsymbol{E}}_s \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_s = 1, \quad \hat{\boldsymbol{E}}_u \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_u = 1, \\ \hat{\boldsymbol{E}}_u \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_s = 0, \quad \hat{\boldsymbol{E}}_s \cdot \hat{\boldsymbol{e}}_u = 0, \end{cases} \tag{5.13}$$

从已知的 $\hat{\boldsymbol{e}}_s$ 与 $\hat{\boldsymbol{e}}_u$ 就能求出 $\hat{\boldsymbol{E}}_s$，$\hat{\boldsymbol{E}}_u$ 来. 从(5.13)的第一与第四式有：

$$\begin{cases} E_{s1} e_{s1} + E_{s2} e_{s2} = 1, \\ E_{s1} e_{u1} + E_{s2} e_{u2} = 0, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} E_{s1} = \dfrac{-e_{u2}}{e_{s2} e_{u1} - e_{u2} e_{s1}}, \\ E_{s2} = \dfrac{e_{u1}}{e_{s2} e_{u1} - e_{u2} e_{s1}}. \end{cases} \tag{5.14}$$

同理可得 E_{u1} 与 E_{u2} 为：

$$\begin{cases} E_{u1} = \dfrac{-e_{s2}}{e_{u2}e_{s1} - e_{s2}e_{u1}}, \\ E_{u2} = \dfrac{e_{s1}}{e_{u2}e_{s1} - e_{s2}e_{u1}}. \end{cases} \tag{5.15}$$

将矢量写成矩阵的形式，即

$$\hat{\boldsymbol{e}}_s = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{E}}_s = \begin{bmatrix} E_{s1} \\ E_{s2} \end{bmatrix}, \quad \hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}} = (E_{s1}, E_{s2}), \quad 等,$$

其中 $\hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}}$ 为 $\hat{\boldsymbol{E}}_s$ 的转置矩阵，也就是矩阵的行与列相互交换后的矩阵. (5.13)中的第一式就可以用矩阵表达式为：

$$\hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}_s = (E_{s1} \quad E_{s2})\begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \end{bmatrix} = E_{s1}e_{s1} + E_{s2}e_{s2} = 1. \tag{5.16}$$

要注意矩阵的乘法是不遵从交换律的，即：

$$\hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}} \neq \hat{\boldsymbol{e}}\hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}},$$

而

$$\hat{\boldsymbol{e}}_s\hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} e_{s1} \\ e_{s2} \end{bmatrix}(E_{s1} \quad E_{s2}) = \begin{bmatrix} e_{s1}E_{s1} & e_{s1}E_{s2} \\ e_{s2}E_{s1} & e_{s2}E_{s2} \end{bmatrix}. \tag{5.17}$$

与(5.16)式完全不同. 不难得到：

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{e}}_s\hat{\boldsymbol{E}}_s^{\mathrm{T}} + \hat{\boldsymbol{e}}_u\hat{\boldsymbol{E}}_u^{\mathrm{T}} &= \begin{bmatrix} e_{s1}E_{s1} & e_{s1}E_{s2} \\ e_{s2}E_{s1} & e_{s2}E_{s2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e_{u1}E_{u1} & e_{u1}E_{u2} \\ e_{u2}E_{s1} & e_{u2}E_{u2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} e_{s1}E_{s1} + e_{u1}E_{u1} & e_{s1}E_{s2} + e_{u1}E_{u2} \\ e_{s2}E_{s1} + e_{u2}E_{u2} & e_{s2}E_{s2} + e_{u2}E_{u2} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \equiv \boldsymbol{I}. \end{aligned} \tag{5.18}$$

$\boldsymbol{I}$ 为单位矩阵，任何矩阵与单位矩阵相乘其值不变. 从

(5.11)式有：

$$M\hat{e}_s\hat{E}_s^T = \lambda_s\hat{e}_s\hat{E}_s^T, \quad M\hat{e}_u\hat{E}_u^T = \lambda_u\hat{e}_u\hat{E}_u^T,$$

将此两式相加并利用(5.18)式结果可得：

$$M(\hat{e}_s\hat{E}_s^T + \hat{e}_u\hat{E}_u^T) = \lambda_s\hat{e}_s\hat{E}_s^T + \lambda_u\hat{e}_u\hat{E}_u^T,$$

即

$$M = \lambda_s\hat{e}_s\hat{E}_s^T + \lambda_u\hat{e}_u\hat{E}_u^T. \tag{5.19}$$

我们知道，(5.7)式是在定点附近作线性映射的方程式，设定点时的参量为 $\tilde{p}$，则(5.7)式实际上应该是：

$$\xi_{n+1} - \xi_f(\tilde{p}) = M(\xi_n - \xi_f(\tilde{p})). \tag{5.7$'$}$$

现在将参量 $\tilde{p}$ 作一微小变化成为 p，则上式成为：

$$\xi_{n+1} - \xi_f'(p) = M(\xi_n - \xi_f'(p)), \tag{5.20}$$

这微小变化引起定点的变化为：

$$\xi_f'(p) - \xi_f(\tilde{p}) \equiv g(p - \tilde{p}),$$

即

$$g \equiv \left(\frac{\partial\xi}{\partial p}\right)_{p=\tilde{p}} \approx \frac{\xi_f'(p) - \xi_f(\tilde{p})}{p - \tilde{p}}. \tag{5.21}$$

可以从两定点位置求得 g. 将(5.21)以及(5.19)式代入(5.20)式得：

$$\xi_{n+1} - g(p - \tilde{p}) - \xi_f(\tilde{p})$$
$$= (\lambda_s\hat{e}_s\hat{E}_s^T + \lambda_u\hat{e}_u\hat{E}_u^T)(\xi_n - g(p - \tilde{p}) - \xi_f(\tilde{p})). \tag{5.22}$$

为了简单，不妨令 $\tilde{p}=0$. 我们希望经过调整后的 ξ_{n+1} 能在稳定流上，也就是说 ξ_{n+1} 与 $\hat{e}_s$ 有相同的方向. 因而按正交归一化条件(5.13)式，将(5.22)式右面乘以矩阵 $\hat{E}_u^T$，利用：

$$\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{s}}=0,\quad \hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\hat{\boldsymbol{e}}_{\mathrm{u}}=1$$

即得：

$$p=\frac{(1-\lambda_{\mathrm{u}})\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{\mathrm{f}}(0)+\lambda_{\mathrm{u}}\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\xi}_{n}}{(\lambda_{\mathrm{u}}-1)\hat{\boldsymbol{E}}_{\mathrm{u}}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{g}}. \tag{5.23}$$

这就是确定调整参量 p 的方程式. 有了 p 值,可以使轨道回到所希望的稳定状态. 这就是 OGY 方法.

OGY 方法提出后,引起了国内外很多人的兴趣,成为研究混沌的热点. 有兴趣的读者可以参考一些专门著作(参考文献[8],[9]),或直接阅读 W. L. Ditto 等的原始文章(参考文献[12]).

6. 奇妙的分形——分形维数的计算

前面我们曾讲到：若吸引子是简单的几何图形，维数都是整数，而且一目了然，这种吸引子是普通吸引子.若吸引子是一些复杂图形，**维数是分数**，这种吸引子称为奇怪吸引子.



分形？是研究花花草草的奇怪形状吗？

"什么是分数的维数？什么是分形？"

具有分数维数的几何图形称为**分形**. 对于分形，首先，要介绍如何计算一个图形的维数，然后看看具有分数维数的图形有些什么特点. 其次我们要介绍，对自然界的一些具体分形，如何来测量其维数. 最后我们介绍分形在各方面的应用.

介绍分形，还得从虫口模型说起. 我们再来看一下虫口模型的(2.3)式

$$x_{n+1}=\gamma x_n(1-x_n), \tag{2.3}$$

现将(2.3)式作变数变换，令

$$x_n=-(z_n/\gamma)+1/2, \tag{6.1}$$

即

$$z_n=\gamma/2-\gamma x_n, \tag{6.1'}$$

代入(2.3)式得

$$-(z_{n+1}/\gamma)+1/2=(\gamma/2-z_n)(\gamma/2+z_n)/\gamma,$$

经过整理可以写成如下简单形式：

$$z_{n+1}=z_n^2+C, \tag{6.2}$$

其中 $C=\gamma/2-\gamma^2/4$. (6.2)式为虫口模型的另一种形式.

令 $z=x+\mathrm{i}y$ 为一个复变量，C 为一复常数. 也就是说，变量 z 由两个变量 x 与 y 组成，其中 $\mathrm{i}^2=-1$，i 为虚数标志，x 为 z 的实数部分，y 为 z 的虚数部分. 对复变量运算时要记住 $\mathrm{i}^2=-1$，例如：

$$z^2=(x+\mathrm{i}y)^2=x^2+(\mathrm{i}y)^2+2x\mathrm{i}y=x^2-y^2+\mathrm{i}2xy.$$

即 z^2 的实数部分为 x^2-y^2，虚数部分为 $2xy$. 一个复数可

以用复平面上的一个点来代表，所谓复平面，就是以虚数 y 为纵坐标，以实数 x 为横坐标的平面. 例如平面上一点 P，设其横坐标为 $x=0.4$，纵坐标为 $y=0.2$，如图 6.1 所示，则 P 点就为 $z_P=0.4+\mathrm{i}0.2$，从坐标原点到 P 点的长度 $\overline{OP}$ 为：

$$[(0.4)^2+(0.2)^2]^{1/2}=0.4472,$$

这里的 0.4472 称为复变量 z 的模. 按模的定义，z_P^2 的模为：

$$\{[(0.4)^2-(0.2)^2]^2+[2\times0.4\times0.2]^2\}^{1/2}=0.2.$$

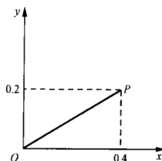


图　6.1

现在限制 x 在某一区间（例如 -2.0 与 0.5 之间）变化，y 在某一区间（例如 -1.25 与 1.25 之间）变化，取一点 P，例如上面所取的（$x=0.4$，$y=0.2$），令 $C=z_P=0.4+\mathrm{i}0.2$. 以 $z=0$ 为初值代入(6.2)式，每次映射后都计算一下 z_{n+1} 的模，当模大于某一个值 M（M 值由自己事先确定），停止映射，记下映射的次数 k；事先规定 k 在某一范围内相对于某种颜色，相应地把 P 点涂成该种颜色. 若映射的次数大于 N 次（N 事先自己确定，例如让 $N=256$）后，若模

仍不能大于 M,则停止映射,将 P 点涂成黑色. 在所允许的范围内,即 $-2.0\leqslant x\leqslant 0.5$, $-1.25\leqslant y\leqslant 1.25$ 的平面区域,均匀地撒布很多点,将每一点都作为 P 点进行映射,按以上规则涂上颜色,则可得一个彩色图. 图类似于图 6.2 所示. 要更细致地分析图形的某一部分,就将某一部分放大.

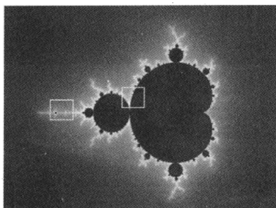


图 6.2 (取自文献[2])

"怎样放大?"

就是把 x 与 y 的范围缩小,譬如 $0\leqslant x\leqslant 0.1$, $-0.05\leqslant y\leqslant 0.05$,在这范围内取同样多的 P 点再进行映射,就可以画出这一部分的放大图. 想要放大哪一部分就相应地取哪一部分,图 6.2 中两个小方形区放大后就是图 6.3 与图 6.4. 图 6.3 中右上角的图形就是图左下端部分的放大;图 6.4 中右面的图形就是箭头所指的边界的放大图.

(6.2)式中的指数 2 还可以换成任意数 n, n 可以是整数,也可以是分数,可以用它画出更美丽的图案来. 你们若

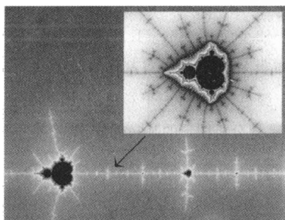


图 6.3 (取自文献[2])

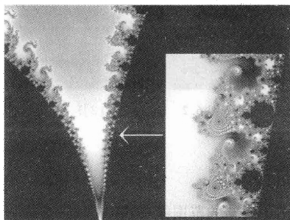


图 6.4 (取自文献[2])

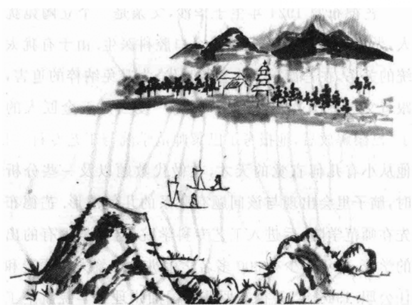
会使用计算机，这样的映射程序是不难编排的，这种美丽的图形就可以在你们的计算机屏幕上出现.

“还可以用其他的方程式画这种美丽的图形吗?”

可以，如在 1991 年 6 月《科技导报》上王本楠与施寅用如上的方法画出了如下式子的图形：

$$z_{n+1} = z_n[k_1 + k_2/(1+z_n^s)]. \qquad (6.3)$$

这是密尔顿(Milton)等人用18年的观察资料,设计的一个北美鹑的生态模型.若令 $k_1=0.25$,$k_2=1.5$,$s=5$;z_n 仍用复变量,范围为 $-13\leqslant x\leqslant 13$,$-13\leqslant y\leqslant 13$;对(6.3)式作映射时,可以得到5个不同的定点解,得到什么定点解,与初始的值 $z_0=x_0+\mathrm{i}y_0$ 有关.现在用5种颜色来代表5种定态解,得到哪一种定态解时,就给初始点 z_0 涂上相应的颜色,这样就得到美丽的图形.(有兴趣可以参考1991年6月《科技导报》上王本楠与施寅的文章.)



山峰不是金字塔,不是圆锥;河岸不是圆弧,树木不是千篇一律.

"这种图形有什么使用意义吗?"

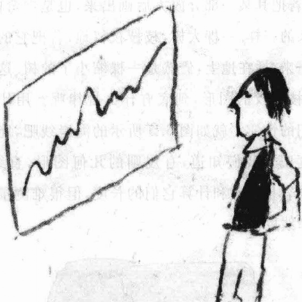
这种图形的集合,被人们称为芒德布罗(Mandelbrot)集,芒德布罗在他自己写的《大自然的分形几何学》(陈守

吉、凌复华翻译，上海远东出版社出版）一书中给出了很多这样的图形. 芒德布罗集与很多自然现象有关，是很有趣味的.

芒德布罗是分形几何的创始人，分形几何就是研究这些古怪图形的几何，他在《大自然的分形几何学》中写道："所有的绚丽都是相对的，我们不应当因为海岸不像防洪堤那样规则，便认为它是畸形的；也不应当因为山峰不是精确的金字塔或圆锥体，便认为它不成样子；也不应当因为星星的间距并非均等，便认为它们分布不当……"

芒德布罗 1924 年生于华沙，父亲是一个立陶宛犹太人，做成衣批发生意，母亲是个口腔科医生. 由于有犹太血统的关系，在芒德布罗的童年时代，为避免纳粹的迫害，他跟着父母多次逃亡，青少年时期一度当过五金匠人的下手. 巴黎解放后，他报考了巴黎师范学院与工艺专科学校. 他从小有几何直觉的天才，在做代数题以及一些分析题时，脑子里会出现与该问题有联系的几何图形. 芒德布罗先在师范学院，后进入工艺专科学院，这都是少有的出色的学校，每年至少有 300 多名学生进入巴黎大学深造和就任公职. 1948 年，芒德布罗获美国加州理工学院航空工程硕士，1952 年获巴黎大学数学科学博士. 1960 年，芒德布罗已经就雇于 IBM 公司的纯科学研究部，他研究一个经济体系的收入大小的分布. 有一次哈佛大学的经济学教授亨德里克・豪塞克(Hendrik Houthakker)请芒德布罗去做报告，当芒德布罗走到哈佛广场的经济学大楼时，吃了一

惊.他看到他做报告要画的经济收入分布曲线,已经被画在亨德里克·豪塞克教授的黑板上了.



怎么我的曲线已经被画在这里啦?

"可能亨德里克·豪塞克教授预先拿到了芒德布罗的报告资料了吧?"

不是,画在哈佛大学经济学大楼黑板上的曲线不是芒德布罗研究的经济收入分布曲线,而是8年来棉花价格的变化曲线.这两条曲线在当时只能从实践中来,没有现成的理论来描述它们,但它们却有着惊人的相似.这种曲线有一个很重要的特点,即细微之处放大来看,与大范围内的变化规律几乎一致.

这类自相似现象,在上一章中已经碰到了,那里是把一些与混沌运动密切相关的非线性方程式,以一定的规律

画图时出现的，现在又在经济学上出现. 进一步观察，这种自相似现象在大自然中也比比皆是. 例如一条海岸线，弯弯曲曲；若把其某一部分放大后画出来，也是弯弯曲曲，几乎与原来的一样. 一棵大树，枝枝杈杈地；若把它的某一个枝条砍下来，插在地上，俨然是一棵缩小了的树. 这种弯弯曲曲、枝枝杈杈的图形，到底有什么规律呢？用什么量来表征它们的性质？就如图 6.5 所示的海岸线吧，能测量它们的长度吗？我们知道，有规则的几何图形，直线、多边形、圆，很容易测量和计算它们的长度，但很难测量一不规则的海岸线的长度.

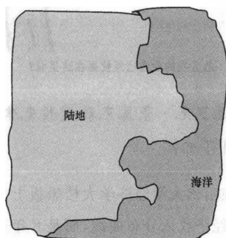
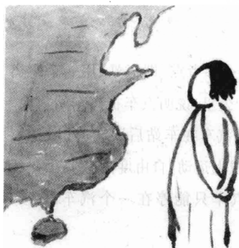


图 6.5 海岸线示意图

"用尺子一尺一尺地量！"

用一条很长的尺子量的结果与用一条比较短的尺子量的结果肯定不一样.



海岸线的长度该如何测量?

"尺子越短,量出的海岸线一定越长."

对,原则上,若用无限短的尺子来量,海岸线就成为无限长.因此,对一个有规则的几何图形,边长是一个重要的量;而对一个无规则的图形,边长就没有任何意义.对这种貌似无规,但在大范围与小范围之间有自相似的图形,重要的特征量是它的"分数维数",简称分维数.芒德布罗从而发展了几何学上崭新的一个分支:分形几何.

"啊!分形几何?什么是分形?"

要了解分形的意思,必须先了解一个普通几何图形的维数.

力学上的维数与自由度数是一致的,一辆汽车只能在固定的汽车路上跑,要说出汽车的位置,需要几个量来说明?

"一个就行了，只要说离出发点有多远就行了."

对，只要选一个参考点，即车站，用一个距离 s 来表示汽车的位置，$s=5$ 公里，说明汽车在离车站前面 5 公里处，$s=-3$ 公里，说明汽车在车站后面 3 公里处. 一个质点被限制在一定的曲线上运动，自由度只有 1，因此任何曲线都是一维的. 一辆汽车只能停在一个汽车站上，自由度为多少？

"汽车只能停着了，一动也不能动，自由度为零了吧！"

对，一个点的自由度为 0，因而"点"的维数为 0.

大家说，一个运动员可以在操场上随便跑，只看他所在的位置，他的自由度为多少？也就是说你需要用几个量来说明他所在的位置？

"两个，在操场上作一个直角坐标，用离直角坐标轴的两个距离 x 与 y 就行了."

"也可以用离坐标原点 O 点的距离 r 和 r 线与 x 轴的角度 θ 两个量来描述."

对，很好. 如何来计算一个几何图形的维数呢？设将 N 维的空间分割成边长为 ϵ 的小体积，如图 6.6 的二维空间，小体积成为边长为 ϵ 的正方形. 若一个集合(这集合可以是一个几何图形，也可以是按某种规律聚合在一起的研究对象)占据了 $\tilde{N}$ 个该小体积，则该集合的维数 D_0 可以

用下式计算：

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \log \breve{N}(\varepsilon) / \log(1/\varepsilon). \qquad (6.4)$$

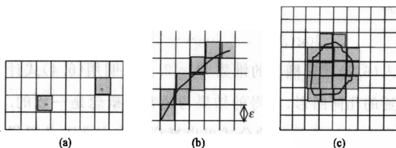


图 6.6

"这式子是什么意思呀？"

$\lim\limits_{\varepsilon \to 0}$表示 ε 取得很小，几乎小到零，$\log \breve{N}(\varepsilon)$是将 $\breve{N}(\varepsilon)$ 取对数.

现在将公式(6.4)用于普通的几何图形，若几何图形为一个点，则 $\breve{N}=1$，与 ε 的大小无关，则在 $\varepsilon \to 0$ 时，$1/\varepsilon$ 为无限大，代入(6.4)式中，则可以看到，一个分数，分子为常数，而分母为无限大，因此该分数值为零.

"因此一个点的维数为零."

对．若研究一条曲线，以 λ 为其长度，则 $\breve{N}$ 与 λ/ε 成正比，即长度越大，$\breve{N}$ 越大；ε 越小，$\breve{N}$ 越大．将 $\breve{N}$ 用 λ/ε 代入，因

$$\log(\lambda/\varepsilon) = \log\lambda + \log(1/\varepsilon),$$

代入(6.4)式后第一项为零，第二项分子与分母一样，为 1，

故得一条曲线的维数 $D_0 = 1$. 若几何图形为一面积，例如一个椭圆. 则 $\breve{N}$ 与 A/ε^2 成正比，这里 A 为椭圆的面积，因为

$$\log(A/\varepsilon^2) = \log A + 2\log(1/\varepsilon),$$

代入(6.4)式得椭圆的维数 $D_0 = 2$. 这说明用(6.4)式计算普通的几何图形，所得的结果与通常的概念是一致的. 这样定义的计算维数的公式可以推广到许多非欧几里得几何图形与其他一些集合.

现在先用(6.4)式来计算康托尔(Cantor)集合的维数. 如图 6.7，康托尔集合是这样做成的：

第一次映射：将 0—1 线段分成三等分，将中间一段去掉，剩下 0—1/3，2/3—1，这样两段.

第二次映射：将 0—1/3，2/3—1，两段都分成三等分，分别去掉中间段，剩下 0—1/9，2/9—3/9，6/9—7/9，8/9—1，等四段.

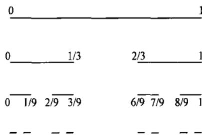


图 6.7

依此类推，不断映射下去，映射了 n 次后，成为很多很短的线段的集合. 现在的问题是这样很多很短很短的线段的集合，它的维数是多少？

"啊！这样小线段的集合也能计算维数？这很难计算吧？"

别急，我们用公式(6.4)来计算，先选一个 ε，当然最方便是选择线段的长度为 ε. 大家看如何来计算线段的长度？

"要是只映射一次或两次，就可以从图上看出来了."

"映射一次长度为 1/3，映射两次长度为 1/9."

很好，大家知道，$1/9=(1/3)\times(1/3)=(1/3)^2$，以此类推，映射 n 次后，线段的长度为$(1/3)^n$，因此 $\varepsilon=(1/3)^n$.

现在再来计算：有多少个线段？映射一次为 2 段，映射 2 次为 4 段，每映射一次线段的数目都翻一番，故映射 n 次线段共有 2^n 段，即 $\breve{N}=2^n$. 代入(6.4)式即得：

$$D_0=\log(2^n)/\log(3^n)=\log(2)/\log(3)=0.63,$$

即康托尔集合的维数为 0.63，是一个分数维.

"康托尔集合有什么用处吗？"

康托尔集合是分形几何中计算分数维的一个很简单易懂的例子，以后我们会讲到，很多自然现象与康托尔集合很类似.

"为什么把画出康托尔集的一次一次分割叫映射？有没有方程式来描述？"

其实是可以用一些方程式来描述康托尔集的. 例如用如下的映射方程式：

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2\eta x_n, & \text{若 } x < 1/2, \\ x_{n+1} = 2\eta(x_n - 1), & \text{若 } x > 1/2. \end{cases} \tag{6.5}$$

保持 x_n 在 0 与 1 之间，映射后比 1 大的与比 0 小的都去掉. 设 $\eta>1$，则如图 6.8 所示，在 $1/2\eta$ 与 1/2 之间的 x_n 点，经映射后 x_{n+1} 都大于 1；在 1/2 与 $1-1/2\eta$ 之间的 x_n 点，经映射后 x_{n+1} 都小于 0. 因此 0 到 1 的线段经一次映射后，成为 $0—1/2\eta$，和$(1-1/\eta)—1$ 两段线段，如图 6.9，每一段线段的长为 $1/2\eta$. 再作一次映射，成为 ab, cd, ef, gh 四条线段，其坐标分别为：

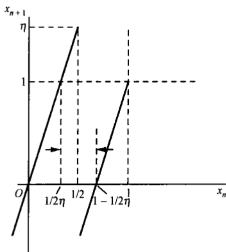


图 6.8

a: 0

b: $(1/2\eta)(1/2\eta)$, $b-a=(1/2\eta)^2$

c: $(1/2\eta)(1-1/2\eta)$

d: $1/2\eta$, $d-c=1/2\eta-(1/2\eta)(1-1/2\eta)=(1/2\eta)^2$

e: $1-1/2\eta$

f：$(1-1/2\eta)+(1/2\eta)(1/2\eta)$，$f-e=(1/2\eta)^2$

g：$(1-1/2\eta)+(1/2\eta)(1-1/2\eta)$

h：1，$h-g=1-(1-1/2\eta)-(1/2\eta)(1-1/2\eta)$

$\quad=(1/2\eta)^2$

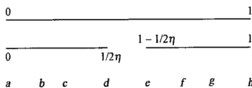


图　6.9

即每一段的长度为$(1/2\eta)^2$. 以此类推，映射 n 次后，每一小段的长度为$(1/2\eta)^n$. 大家看，若让 $\eta=3/2$，与前面的康托尔集合比较，看出什么啦？

"完全一样了."

对，完全一样了，因此说明了康托尔集合是可以通过方程式映射得出来的. 现在这个线段的集合也称为康托尔集，通常把前面 $\eta=3/2$ 的康托尔集称为中间三分之一康托尔集(middle third Cantor set). 现在来计算这个集合的维数，令 $\varepsilon=(1/2\eta)^n$，线段的总数仍为 $\breve{N}=2^n$. 代入(6.1)式，得维数为：

$$D_0=\log(2)/\log(2\eta). \tag{6.6}$$

现在再来看下式的映射：

$$\begin{cases} x_{n+1}=\lambda_a x_n, & \text{若 } y_n<\alpha, \\ x_{n+1}=(1-\lambda_b)+\lambda_b x_n, & \text{若 } y_n>\alpha; \end{cases} \tag{6.7a}$$

$$\begin{cases} y_{n+1} = x_n/\alpha, & 若\ y_n < \alpha, \\ y_{n+1} = (y_n - \alpha)/\beta, & 若\ y_n > \alpha. \end{cases} \tag{6.7b}$$

$\alpha+\beta=1$，$\lambda_a+\lambda_b\leqslant 1$，$x$ 与 y 都限制在 0 与 1 之间；这种映射称为贝克尔映射(Baker's map). 现在用图形来表示映射的过程.

映射前是一个 x，y 均从 0 到 1 的正方形，如图 6.10(a)所示. 按式(6.7a)，$y<\alpha$ 的部分，x 压缩至 λ_a，$y>\alpha$ 的部分压缩至 λ_b(这时暂不管$(1-\lambda_b)$)，从而得图 6.10(b). 按式(6.7b)，$y<\alpha$ 的部分，y 放大 α 倍，使 y 从 0 到 α 变成 0 到 1.

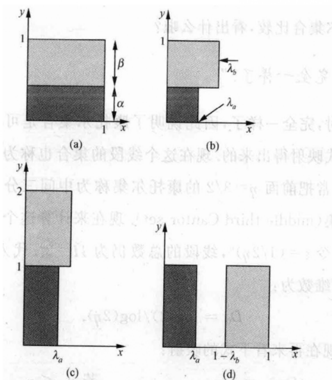


图 6.10

“按式(6.7b)式，为什么是放大呢？”

大家记住，α 是一个比 1 还小的量，除一个比 1 小的量，结果就变大了. 将 $y>\alpha$ 的部分减去 α 后放大了 β 倍，因 $\beta=1-\alpha$，因此这一部分也从 0 到 β 放大到 0 到 1，如图 6.10(c)所示. 再看式(6.7a) $y>\alpha$ 的部分，x 还需要加上 $(1-\lambda_b)$，加上这一项后，就把重叠在上面的图形放到正常位置，成为图 6.10(d)的样子. 这就是说，图 6.10(a)正方形经式(6.7)一次映射后，成为图 6.10(d)那样的两个矩形，y 方向仍然充满了 0 到 1 的整个线段，x 方向上从 0 到 1 却分成了两段，一段从 0 到 λ_a，一段从 $1-\lambda_b$ 到 1；一段宽度为 λ_a，一段宽度为 λ_b.

不难推想，作第二次映射后，两段都分别分成两段，共为四段，如图 6.11 所示：宽度分别为 λ_a^2，$\lambda_b\lambda_a$，$\lambda_b\lambda_a$，λ_b^2. 其 x 坐标分表为：

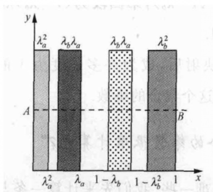


图　6.11

第一段：从 $0\rightarrow\lambda_a^2$；

第二段：从$(1-\lambda_b)\lambda_a \to \lambda_a$；

第三段：从$(1-\lambda_b) \to (1-\lambda_b)+\lambda_a\lambda_b$；

第四段：从$(1-\lambda_b)\lambda_b+(1-\lambda_b) \to 1$，即$(1-\lambda_b^2) \to 1$.

“你怎么那么快就算出第二次映射的结果了呢？”

其实并不难，在第二次映射时，第一段若长度为1，则映射后分成长度为λ_a与λ_b两段，第一段的起点为0，末端坐标为λ_a；第二段的起点为$(1-\lambda_b)$，末端坐标为1. 现第一段长度为λ_a，故分成两段时，所有量都必须乘以λ_a. 因而得长度分别为λ_a^2，$\lambda_b\lambda_a$两段；坐标分别也都乘以λ_a，因而第一段成为从0至λ_a^2；第二段$(1-\lambda_b)\lambda_a \to \lambda_a$. 原来的第二段分成第三第四段，长度为$\lambda_b$，故必须所有量乘以$\lambda_b$，就得长度为$\lambda_b\lambda_a$，$\lambda_b^2$两段. 计算其$x$坐标时要注意，因这一段的起点不是0而是$(1-\lambda_b)$，故必须加上这坐标的移动. 故第三段坐标若从0开始为$0 \to \lambda_a\lambda_b$，现要分别加上$(1-\lambda_b)$，即成为$(1-\lambda_b) \to \lambda_a\lambda_b+(1-\lambda_b)$；第四段为$(1-\lambda_b)\lambda_b+(1-\lambda_b) \to 1$，即$(1-\lambda_b^2) \to 1$.

经过n次映射后，成为许多长度为1的细长条的集合. 现在来计算这个集合的维数.

“这个集合的维数很难计算吧？”

是，是比较难一些. 我们先来计算一条与x轴平行的直线AB的集合的维数，AB直线形成的集合又是一种康托尔集. 在图6.12我们来比较三种康托尔集，画出第一次

映射后的线段长度.第一种康托尔集的两个线段长度都为 1/3;第二种康托尔集的两个线段长度都为 $1/2\eta$;第三种康托尔集的两个线段具有不同长度,一为 λ_a,另一为 λ_b.计算前两种康托尔集的维数时选 ε 比较容易,只要选小线段的长度就是了;现在第三种康托尔集的 ε 就不能是小线段的长度了.

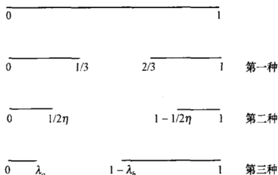


图 6.12

"ε 可以不是线段的长度吗?"

当然可以,ε 可以比那个线段都小,譬如用 ε 衡量,较小的线段有 2 段,较大的线段有 5 段等.现在以 $\tilde{N}$ 为集合盖住 ε 的总数,设其维数用 D 表示.由(6.4)式维数 D 与 ε 以及总数 $\tilde{N}$ 之间的关系为:

$$D=(\log\tilde{N})/[\log(1/\varepsilon)].$$

这式子把前面 $\varepsilon\to 0$ 的极限符号省略掉了,为了方便,可以把上式写成:

$$\tilde{N}\simeq K\varepsilon^{-D}, \tag{6.8}$$

其中 K 为一常数. 设 $\widetilde{N}_a$ 为第一次映射后长为 λ_a 的线段覆盖 ε 的总数，$\widetilde{N}_b$ 为第一次映射后长为 λ_b 线段覆盖 ε 的总数，则显然有：

$$\widetilde{N} = \widetilde{N}_a + \widetilde{N}_b. \qquad (6.9)$$

若把 $0—\lambda_a$ 段放大成 0—1 线段大小，则维数也为 D，若仍选 ε 为小线段，则总数仍为 $\widetilde{N}$；但实际上只有比 1 小的 λ_a 长，故总数应该比 $\widetilde{N}$ 小，为 $\widetilde{N}_a$. 但若选 ε/λ_a 为小线段，即把小线段放长了，则盖住小线段的总数必然要少了，刚好为 $\widetilde{N}_a$. 故有：

$$\widetilde{N}_a \cong K(\varepsilon/\lambda_a)^{-D} \cong \widetilde{N}\lambda_a^D.$$

对 $(1-\lambda_b)\to 1$ 段作同样的考虑有：

$$\widetilde{N}_b \cong K(\varepsilon/\lambda_b)^{-D} \cong \widetilde{N}\lambda_b^D.$$

代入(6.9)式得：

$$\lambda_a^D + \lambda_b^D = 1. \qquad (6.10)$$

解上式就能得到 D，这就是分成不同长度线段时康托尔集的维数的计算公式.

"这式子容易解吗?"

一般情况下，这式子只能用计算机来解. 若 $\lambda_a=\lambda_b=1/3$，则(6.10)式成为 $2(1/3)^D=1$，即得：

$$D = (\log 2)/(\log 3) = 0.63,$$

即中间三分之一康托尔集的维数. 若 $\lambda_b=1-\lambda_a$，则 $D=1$ 显然为(6.10)式的解. 这种情况下，不管作多少次映射，AB 永远是一条完整的直线，当然应该 $D=1$.

现在的集合不是康托尔集合，是很多细长方形的集合，也就是说图形是在一平面上的. 由于在 y 方向，不管进行多少次映射，y 方向永远充满 0 与 1 之间不变，也就是说与 y 方向所取的标准小线段长短无关. 设 y 方向盖住所有 ε 的总数为 $\tilde{N}_y=1/\varepsilon$，则(6.7)式的贝克尔映象的维数为：

$$\begin{aligned} D_0 &= \lim_{\varepsilon\to 0}[\log(\tilde{N}_y\tilde{N})/\log(1/\varepsilon)] \\ &= \lim_{\varepsilon\to 0}[(\log\tilde{N}_y)/\log(1/\varepsilon)+(\log\tilde{N})/\log(1/\varepsilon)] \\ &= 1+D. \end{aligned} \tag{6.11}$$

因此占据一个平面的集合的分形维数，可以由相互垂直的两直线的分形维数相加而成.

下面我们来计算以下几个集合的维数，最初几次映射如相应的图所示.

(1) 图 6.13 图形，称为平面上的康托尔集合：即第一次映象，将一个正方形分成 9 个小正方形，留下四角上的 4 个；第二次映象，将每个小正方形再分成 9 个，留下 4 个；接着这样继续下去，成为一种粉尘的集合. 经过 n 次映射后，小正方形边长为$(1/3)^n$，取 $\varepsilon=(1/3)^n$，共有 4^n 个，则 $\breve{N}=4^n$，因而其维数为：

$$D_0=(\log 4)/(\log 3)=1.2618.$$

(2) 图 6.14 图形，为另一种康托尔集合，将一正方形分成 16 个小正方形，第一行留下第二个，第二行留下第四个，第三行留下第一个，第四行留下第三个；之后按着规则处理留下的四个小正方形；以此类推，经过 n 次映射后，形

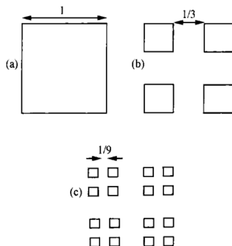


图 6.13

成另一种粉尘状的一个平面康托尔集. 大家看,这个平面康托尔集的维数为多少?

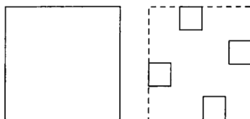


图 6.14

"我看 $\varepsilon=(1/4)^n$, $\breve{N}=4^n$, D_0 应该等于 1,对吗?"

对,完全正确,$D_0=(\log 4)/(\log 4)=1$.

(3) 图 6.15 图形,也是把一正方形分成 16 个小正方形,留下四角的 4 个与中间的 4 个,这样继续分下去,经 n 次后,成了一个细小的斜十字架. 仍取 $\varepsilon=(1/4)^n$, $\breve{N}=8^n$, 则这图形的维数为:

$$D_0 = (\log 8)/(\log 4) = 3/2 = 1.5.$$

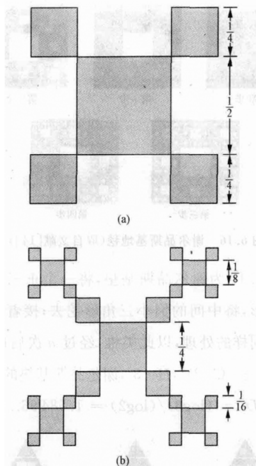


图　6.15

(4) 图 6.16 称为谢尔品斯基地毯，是 1915 年波兰数学家谢尔品斯基(W. Sierpinski)提出的. 谢尔品斯基地毯是这样做成的：将一个正方形分成 9 个小正方形，将中间的小正方形挖去；接着将剩下的 8 个小正方形又各分成 9 个，挖去中间一个，以此类推，以至无穷. 不难算出，取 $\varepsilon=(1/3)^n$，$\breve{N}=8^n$，谢尔品斯基地毯的维数为：

$$D_0 = (\log 8)/(\log 3) = 1.8928.$$

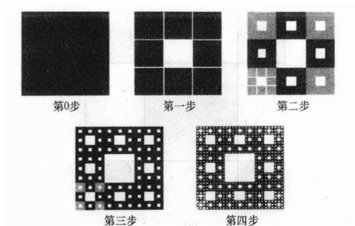


图 6.16 谢尔品斯基地毯(取自文献[14])

(5) 图 6.17 为谢尔品斯基垫,将一个正三角形分成 4 个小正三角形,将中间的倒小三角形挖去;接着将剩下的 3 个三角形作同样的处理,以此类推,经过 n 次后成为谢尔品斯基垫. 显然,$\varepsilon=(1/2)^n$,$\breve{H}=3^n$,谢尔品斯基垫的维数为:

$$D_0 = (\log 3)/(\log 2) = 1.58496.$$

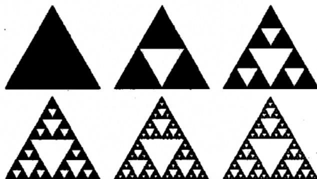


图 6.17 谢尔品斯基垫(取自文献[14])

(6) 图 6.18 图形: 这图形称为考赫(Koch)曲线. 我们来看考赫曲线是如何形成的: 第一次映射,把直线的中间三分

之一，鼓成一个三角形，直线变成长度等于原长三分之一的4段折线；第二次映射，每一段折线又鼓成原长三分之一的4段折线. 以此类推，经过 n 次映射后，折线长度成为 $(1/3)^n$，共有折线 4^n 条. 令 $\varepsilon=(1/3)^n$，则 $\breve{N}=4^n$，代入(6.4)式得：

$$D_0=(\log 4^n)/(\log 3^n)=(\log 4)/(\log 3)=1.2618.$$

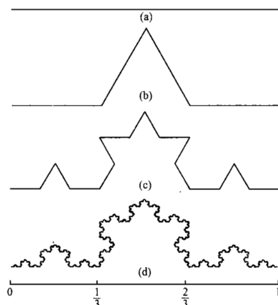


图 6.18　考赫曲线

“考赫曲线很像雪花！”

对，考赫曲线又叫考赫雪花，假如在一个正三角形的边上作考赫曲线，就非常像雪花了.

“考赫曲线也非常像海岸线！”

考赫曲线与真正的海岸线比较，还太规则了一点. 假

如我们在作考赫曲线的时候，加上一点随机的因素……

"如何加上一点随机因素？"

当鼓成一个三角形时，不是总向外鼓，向外还是向内具有一定的几率，最简单的情况是向外与向内的几率都为1/2.那只要拿一个镍币来随手一丢就是了，正面朝上向外鼓，反面朝上向内鼓；也可以向外鼓的几率大于向内鼓的，如拿一个骰子一丢，若出现1,2,3,4时向外鼓，出现5,6时向内鼓，这样向外鼓的几率为2/3，向内鼓的几率为1/3.这种随机考赫曲线更与真实的海岸线接近，如图6.19所示.



图6.19 随机考赫曲线

用分形几何可以画很多美丽的图画，简单的用手工就可以画成，若映射的次数多了，在计算机上编一个小程序也就可以了.画分形图形时，只要设计一个"起始器"，一个"发生器"，就能画出各种各样的图形来.

"什么是起始器？什么是发生器？"

例如在一个正三角形的三个边上画考赫曲线，则三角形就是起始器，一个线段上的第一次映射就是发生器，如图6.20所示.起始器决定最后图形的总体情况，如图6.18

的考赫曲线的起始器就是一条直线. 分析出图形的发生器,就很容易从发生器计算图形的维数.

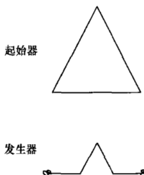


图 6.20

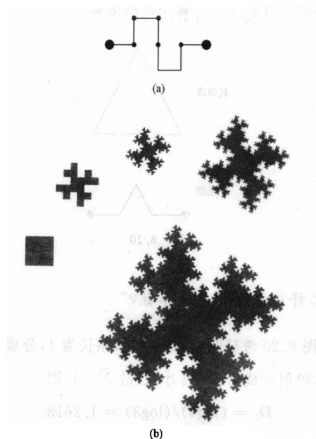
“怎样从发生器计算维数?”

看图 6.20 考赫曲线的发生器,原长为 1,分成 3 等分,$\varepsilon=1/3$,映射后成为 4 个 ε 小段. 故 $\widetilde{N}=4$,则

$$D_0 = (\log 4)/(\log 3) = 1.2618.$$

也可以用这样简单的方法计算更复杂的图形. 例如,如图 6.21 为正方形的考赫岛,起始器为一个正方形,发生器如图 6.21(a),经过几次映射后图形如图 6.21(b)所示;从它的发生器,很容易计算出它的维数. 一条 0—1 的直线,分成了四等分,每一段长为 1/4,而这一条直线却变换成由 8 个 1/4 线段组成;大家记住,这是一条直线经第一次映射的结果,若进行了 n 次映射,则线段长为$(1/4)^n$,线段共有 8^n 段. 令 $\varepsilon=(1/4)^n$,$\widetilde{N}=8^n$,按(6.4)式计算维数时可以不去管 n 指数,让 $\varepsilon=1/4$,$\widetilde{N}=8$,就成了:

$$D = (\log 8)/(\log 4) = 3/2.$$



(b)

图 6.21 （取自文献[14]）

"分形几何有什么实际用处?"

分形几何与混沌动力学具有密切的联系，正如欧几里得几何描写线性动力学的运动轨道那样，非线性动力学的轨迹需要分形几何来描述. 当然，正如欧几里得几何还有着很多其他用处一样，分形几何作为一门相对独立的数学分支，在各种学科领域都有着广泛的应用，我们慢慢讲来.

7. 大自然的艺术——分形维数的测量

我们生活着的自然界是如此地奇妙，如此地丰富多彩；白云在蔚蓝的天空中变幻着各种美丽的形态，山峦起伏着，如龙蟠、如虎踞，河水蜿蜒地流过大地，海水冲击着海岸掀起雪花般的浪花. 夜晚，微风轻轻地拂着树叶，星星在天空中闪烁. 可是有时候，大自然又会发怒了，黑云压城，狂风四起，惊涛骇浪，天崩地裂. 它们到底是按什么规律形成的？又将如何发展？人们渴望着了解各种自然现象，渴望着用几何图形来描述它们. 可是，正如分形几何的开创者芒德布罗在《大自然的分形几何学》的引言中说的："为什么几何学常常被说成'冷酷无情'和'枯燥无味'？原因之一在于它无力描写云彩、山岭、海岸线或树木的形状. 云彩不是球体，山岭不是锥体，海岸线不是圆周，树皮并不光滑，闪电更不是沿着直线传播的."



山峦起伏着，如龙蟠、如虎踞，河水蜿蜒地流过大地。

分形几何的诞生，向传统的数学观念提出了新的挑战，它说明，不仅有必要研究那些光滑的、规则的造形，而



可有时候，又黑云压城，狂风四起。

且更有必要研究那些非光滑的和非规则的造形. 这是因为,在自然界中,在科学研究的各领域中,前者凤毛麟角,后者不可胜数.

"如何用分形几何来描述大自然?"

这个问题比较大,也比较笼统,我们一桩一桩地说来. 例如研究海岸线的分维数的问题,在第 6 章,我们曾经说过,随机的考赫曲线可以与海岸线很相似,但那也只是相似而已. 实际的海岸线需要用测量的方法把它的分维数测量出来. 芒德布罗对某些实际海岸线的测量结果表明,不同地区的海岸线,其分维数 D 有一定的差别,英国西部海岸线的分维数 $D=1.25$,澳大利亚海岸线 $D=1.13$,南部非洲海岸线 $D=1.02$. 海岸线的分维数高,说明形状复杂程度高.

"海岸线的分维数是如何测量出来的?"

测量不规则曲线的分维数可以有三种方法,我们把这三种方法分别称为:

(一) 步长法: 如图 7.1 所示,为英国大不列颠岛地图. 取该图的最大宽度为 L,令 L 为单位长度 1,取 λ 长的线段为步长,λ 比 L 要小多了,L 为 1,λ 就从 0.05 到 0.17 的范围变化. 可以用圆规做成 λ 长,沿着地图边界画出每边长为 λ 的多边形,计算出多边形的边长 P.



图 7.1

“假如用圆规画多边形时，地图不恰好是λ的整数倍怎么办？”

不要紧，如果我们画的多边形，共有 n 段 λ，最后还留下了一小段比 λ 短，只有 λ 的 α 倍，即 $\alpha\lambda$ 长，则 $P=n\lambda+\alpha\lambda$. 变化 λ，得出相应的 P；然后将 P 为纵坐标，λ 为横坐标，画在对数纸上，成为一条直线，求出这条直线的斜率 m，则边界的分维数 D 为：

$$D = 1+|m| . \tag{7.1}$$

“为什么分维数用(7.1)这样的公式计算？为什么斜率要用绝对值？”

我们还记得计算考赫曲线的分维数的方法吗？经过 n 次迭代后，考赫曲线的每一段折线长度成为 $(1/3)^n$，共有折

线 4^n 条. 令 $\varepsilon=(1/3)^n$，则 $\breve{И}=4^n$，考赫曲线的分维数就为：

$$D_0=-(\log\breve{И})/(\log\varepsilon)=(\log4^n)/(\log3^n)$$
$$=(\log4)/(\log3)=1.2618.$$

我们若把海岸线看成考赫曲线，则 λ 就相当 ε，n 就相当于 $\breve{И}$，因而就有

$$D=-(\log n)/(\log\lambda)=-[(\log P)-(\log\lambda)]/(\log\lambda)$$
$$=1-(\log P)/(\log\lambda)$$
$$=1+|m|.$$

上面把 n 转换成 P 的时候，把 $\alpha\lambda$ 那点小量就忽略了. 因为 λ 越小，P 越大，因此斜率是负的，把 $-(\log P)/(\log\lambda)$ 用 $+|m|$ 表示，只是为了更清楚地说明海岸线的分维数大于 1 就是了. 大家说，若海岸线是一条光滑曲线，那它的分维数为多少？

"我知道，上一节计算过一条曲线的维数，为 1."

对，因此 D 越大，说明了海岸线越复杂.

"为什么光滑曲线的斜率 $|m|$ 为零呢？"

因为光滑曲线的长度 P 不随步长的长度 λ 而变化.

"第二种与第三种测量海岸线的方法呢？"

（二）香肠法：这种方法常用于图形的边界比较模糊的情况. 当人们检查这种边界时，并不知道边界的确切位置，有时甚至连猜想的余地都没有. 例如要测量云彩的边

界的维数,当我们在地面上观察云彩时,云似乎是有边界的,不过,这个边界是通过我们的眼睛和大脑系统确定的,任何乘飞机经过云彩中间的人都知道,云彩的起止边界是模糊不清的.测量具有不确定边界的分形结构时,人们在模糊边界的每一段上画一个圆,这些圆连在一起形成了边界带.由于这一边界带拉直时像一根香肠,因此把这种模糊曲线的测量方法称作香肠法.芒德布罗指出,这就像一个人在海岸线上摆橡胶轮胎来测量大不列颠岛海岸线的长度一样.人们没有必要去关心轮胎下海岸线的位置,而只需保证海岸线与轮胎的某一位置接触.如果人们用这方法测定海岸线,就可以用轮胎覆盖的面积除以轮胎的宽度,而得到海岸线的估计值如图 7.2(a)所示.

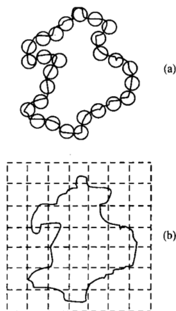


图 7.2

(三) 数格子法：这种方法只不过是把图画在方格纸上，数曲线通过的小方格数来代替圆周数而已，如图 7.2(b)所示.

"测量了海岸线的分维数有什么用?"

因为分维数反映了海岸线的复杂程度.造成海岸线复杂程度不同，根本原因是地质的因素.地球的地壳是不断在运动的，有些地方的地壳在上升，有些地方的地壳在下降.地壳上升的地区容易造成较复杂的岩岸型海岸；尤其那些被大陆冰覆盖的地区，地壳上升将会造成强烈的冰川下的剥蚀，可以形成最复杂的海岸线，例如英国西北部海岸线.在地壳稳定或下降地区，由于沉积作用超过剥蚀作用，常常为沙岸，海岸线一般比较平直单一，我国华北的海岸线即属此种类型.当然，海岸线的复杂程度还与气候条件、海水性质以及风化程度等有关.总而言之，反应海岸线复杂程度的分维数，体现了该地区地质结构与内外地质应力的综合作用，这些作用可以与分维数定量地联系起来.

对地质与地理的研究，是与国家的经济发展、人民生活的安全与提高密切相关的.例如有关石油的勘探问题.大家知道石油是储藏在什么地方的吗？是如何找出来的？

"在地底下，怎样找出来就不知道了!"

因为石油是液体，就像要保存水一样，必须要一个容器、一个桶或一个缸.勘探底下有没有石油，就是找出地下

有没有适合储藏石油的容器.

“什么是储藏石油的容器?”

储藏石油的容器就是一种岩石构造,一种碳酸盐岩层构造,称为碳酸盐岩储集层.勘探人员常常用物理勘探的方法来寻找这种储藏层.

“什么是物理勘探方法?”

顾名思义,就是用物理的方法.譬如,用爆炸的手段制造一个地震波,探测地震波碰到岩层时的反射、折射情况,可以判断有没有储油层构造.或用电学的方法,看各处电位的变化也可以判断地层构造情况.物理勘探的方法常常是一种普查的方法,最后是否有开采的价值还需要实地探井.但不管怎样,地面是那么辽阔,地质学家们必须有一些地质理论来预示地下的情况.大家知道,我国曾被外国人称为贫油国家.

“什么是贫油国家?”

在解放前,我们国家用的石油基本上都是从外国进口,把石油称为“洋油”;外国专家认为我们国家地底下没有石油,也就是贫油国家.新中国成立后,中国的科学家不服气这个荒谬的论断,我们这样辽阔的国土下会没有石油?!我国著名地质学家李四光首先用力学观点研究地壳运动及其与矿产分布的规律,建立了新的边缘科学“地质

力学”,并提出“构造体系”概念. 预言了新华夏体系三个沉淀带有广阔找油的远景,打破了“贫油”的谬论. 他的理论为大庆、胜利等油田的发现所证实.

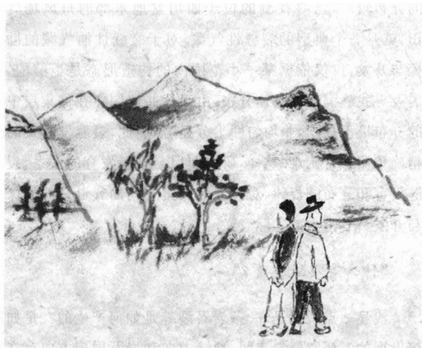
“啊! 科学理论很重要!”

理论一定要与实际情况相结合,要特别重视从实践中获得的资料. 来自地质和石油物理探测界的资料表明,碳酸盐岩储集层在其沉淀环境、成岩和构造应力影响下,其断层、裂缝、孔隙空洞的分布,呈各向异性、极不均质等强非线性特征. 因此,是典型的无序介质. 这类储集层在四川的分布较广,已寻找到的位于四川盆地东部的丹凤场气田,就是一个典型的裂缝性气藏. 对于裂缝性油气藏的勘探与开发,仅仅依据某一小范围内的构造形态是不够的,需要寻找缝洞体的具体分布. 由于这些缝洞体在储集层中的分布极不规则,非均匀性十分显著. 因此,裂缝发育带的精确预测非常困难. 这样,研究断层与裂缝发育的关系,裂缝发育和分布的规律,对裂缝性储集空间油气资源的勘探与开发具有重大的实际意义.

“什么是裂缝发育?”

浅显一点说就是,一条岩石裂缝是如何产生的? 是如何发展的? 研究资料表明,裂缝方向和岩石层理方向存在一定的规律. 一种意见认为,裂缝产生于褶皱过程中(褶皱伴生缝)及进一步的构造断裂变形运动中;而另一种意见

认为，在成因上裂缝和逐步褶皱的形态以及变形运动之间没有任何联系；还有一些学者认为，成岩和构造两种类型的裂缝随着时间的推移而融合在一起. 由此，没有任何构造因素的影响，岩石中产生的次生变化也可以形成裂缝. 这样关于裂缝的成因有三种互不相同的假设：褶皱前产生的裂缝，与褶皱同时产生的裂缝，褶皱后产生的裂缝. 现代观察资料和研究结果表明，从全球性的大规模构造和人造地球卫星拍摄的大地裂缝到各种不同尺度的断层、裂缝乃至只有在显微镜下才能看到的微破裂，其结构上都存在着相似性.



别急！根据分形的考虑，这地貌下很可能有我们要找的矿.

"这不就是分形结构了吗?"

是的,断层和裂缝系统的这种自相似性,就是分形结构的表现.这种地质上的分形结构,可能是由于构造应力或地质作用,在褶皱的形成过程和构造断裂变形运动中,产生各种不同尺度的断带、裂纹,而且向各个方向扩张的结果.由于这种分形性质的结构,说明了裂缝与褶皱同时产生这一假设似乎更为合理.现在有人把裂缝系统产生和扩张的机理及自相似结构用分形理论描述,并通过裂缝扩张指数或扩展几率来计算裂缝网络的分维.而裂缝扩展几率又可以和裂缝参数如裂缝体积密度、面积密度、线密度、裂缝张开度、裂隙率等联系起来.裂缝空间方位也可以和分形模型联系起来.因此.分形在地质运动中的应用,得到了研究裂缝形成、扩展及分布规律的一种新方法.

地面观察与岩心取样的结果表明,地表露头上的裂缝系统与地下深处具有相似性,地下深处有效裂缝密度最大的地方也就是上部地层或天然露头上的裂缝强烈发育带.这也是断层与裂缝系统具有分形分布的有力证据.地下深部岩石裂缝强烈发育带与地表的自相似性,对碳酸盐岩地区的油气资源勘探具有重大的实际意义.

"分形理论对勘探真有用!还可以从露在外面的露头来判断底下的情况!"

地质理论不像许多其他学科,因它研究的对象是很复

杂的地壳运动,又在地层深处,地壳中岩石、裂缝等都是很复杂很不规则的形状,因此分形理论肯定在地质、地理的研究中会起很大的作用.

我们住在地球上,大地底下是个很复杂的结构,我们必须了解它,不但要从地底下挖掘资源,还要预测地球母亲的发怒.



海啸!地球母亲发怒了!要能预报该多好!

"地球母亲发怒,就是要地震了吧?"

是的,地球是个不稳定的球体,由于组成地层的一些板块的运动,会隐藏积聚起一些能量,在一定的条件下能量突然以爆裂的形式释放出来,形成了地震,地震发生在海底,就成为海啸.地震是很可怕的灾难,人们没有办法制止它的发生,但至少希望能预先知道它的发生.全世界的地震科学家都想找到地震预报的方法,希望能够及早做准

备，尽量减少生命财产的损失.

“怎样预报地震呢？能应用分形几何吗？”

地震的发生是一个极其复杂的自然现象，地震的孕育、发生势必导致地壳介质各种物理、化学的变化，用检测手段可把这些异常现象记录下来.

“怎样记录呢？”

简单地说吧，以时间为坐标轴，出现异常了就在该轴上画一小道，如图 7.3 所示. 这与康托尔集很类似，取一定的时间间隔定为 1，可以来计算这段时间间隔之间的异常记录的分维数.

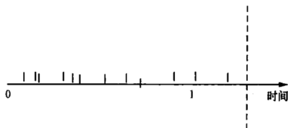


图 7.3

“怎样计算分维数？”

取 ε 为小于 1 的小段时间间隔，将 0 到 1 的时间间隔分成许多 ε 小段，将小段中包含有异常点的挑出来，设这些小段共有 N 段.

"若一个小段中有两个或两个以上的异常点怎么办?"

挑的时候只管有没有异常点，有 1 个或 2 个或多个异常点都没有关系，凡是有，就挑出来，因此这 N 个小段中，有的小段可以只有一个异常点，有的可以有多个异常点. 变化 ε，当然 N 也跟着变化，因而 N 是 ε 的函数，写成 $N(\varepsilon)$. 以 $\log N(\varepsilon)$为纵坐标，$\log(1/\varepsilon)$为横坐标，作出曲线如图 7.4 所示. 在 ε 比较大时，每一个 ε 小段都会包含有异常点，因而 N 就是小段的总数，$N=1/\varepsilon$，因而曲线的开始一段 Oa 段，斜率为 1，这说明 ε 取得太大，显示不出异常点的分形性质. 若 ε 取得太小，则小段中包含的异常点最多只能有一点，没有多于一点的情况存在，这样，N 就是等于所有的异常点，变化 ε 的大小，N 就不变了，曲线斜率就为 0，这就是曲线的 bc 段；这说明 ε 取得太小时也显示不出异常点的分形性质. 能显示分形性质的是 ab 段，这时需要 ε 大小取得适当.

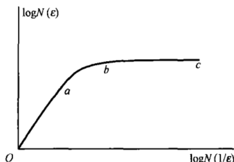


图 7.4

河北省地震局平建军等人利用分形几何学，在地震的预报方面做了不少有益的工作.他们核实了1975—1992年6月河北省全部以及邻区个别台站的地电、应力、水位、地磁、形变等方面的地震异常328条，再补充了其他文献中的数据.按照上述求取D值的方法，获得1975到1992年6月的D值34个.他们发现，虽然D值曲线忽高忽低很不平稳，但在河北省及其邻近绝大多数震级大于5的地震前，都有D低值异常出现，情况如下表所示.

项目 / D值异常时间	D值	对应地震			最后一个D值异常距发震时间
		时间	地点	震级	
1976-06-30	0.159	1976-07-28	唐山	7.8	28天
1978-12-31	0.292	1979-06-19	介休	5.1	170天
1980-06-30	0.324				
1983-06-30	0.354	1983-11-07	菏泽	5.9	130天
1984-12-31	0.199				
1985-06-30	0.383	1985-11-30	邢台	5.2	153天
1988-06-30	0.224				
1988-12-31	0.268				
1989-06-30	0.304	1989-10-19	大同	5.8	111天
1990-12-31	0.289	1991-01-29	忻州	5.1	29天
		1991-03-26	大同	5.8	85天
		1991-05-30	陡河	5.2	150天

除了1980年6月30日的D值的异常为虚异常外，其余6次异常都与震级大于5的地震相对应.因此D值的异常可作未来6个月邻近地区的地震预报.

“为什么D出现低值时，会发生地震，能从理论上解释吗？”

从理论上解释不是很容易，大致上可以这样看.从分

析统计很多实际地震情况，得到一个经验公式称为古登堡公式．以 M 表示地震的震级，N 表示该震级的地震次数，震级与次数之间存在如下关系式：

$$\log N = a - bM, \tag{7.2}$$

式中 a,b 为常数，这就是古登堡公式．当然，M 越大，N 越小，这是可以理解的．地震都要释放很多能量，震级越高，释放的能量越多，震级 M 与地震能量 E 之间的关系为：

$$\log E = cM + d, \tag{7.3}$$

c,d 为常数．而能量 E 又与震源半径 r 的立方成正比，即：

$$E = \alpha r^3, \tag{7.4}$$

比较上面三式，容易得出：

$$N = \beta r^{-D}, \tag{7.5}$$

其中 $D=3b/c$，β 为与 a,b,c,d 有关的常数．因测出常数 $c\approx1.5$，故 $D\approx2b$，(7.5)式为地震强度分布的分形结构，D 为其分维．尽管分维下降常用来作为地震先兆来预报，但是，大量的实际统计资料表明，关系式(7.2)一般不能完全满足，还需要不断从理论上改进地震公式的分形结构．

地震还容易引起滑坡，滑坡是土体或岩体沿着一定的滑移面作整体滑动的地质地貌现象．滑坡的产生也受到气候、地形地貌、地质构造的制约．甘肃中部及其邻近地区，大部分为黄土覆盖，为我国黄土高原的一部分．在这一地区，黄土滑坡灾害时有发生．如 1920 年海原 8.5 级地震，

和1927年古浪8级地震，都产生了大量的地震滑坡. 因此研究滑坡的分布规律，对地震引起的滑坡灾害的预测是非常必要的.

滑坡与河流的分布有很大关系，地质学上把河流的分布称为水系. 水系是由地表水的侵蚀、搬运和堆积作用形成的地貌景观，也是所有地区内外地质应力作用的产物. 水系的形成和发育与气候、地层岩性、地质构造等诸因素有关. 进行水系分形几何学的研究可以定量地比较、分析水系的形态特征及其在不同区域的差异.

"如何计算水系的分维数呢?"

假如将测量得到的水系画在图上，将图形分成很多边长为 ε 的小格，如图7.5所示. 把含有水系的小格数出来，令这些小格的数目为 $N(\varepsilon)$，N 必然随着 ε 的变化而变化，将 $N(\varepsilon)$ 与 ε 画在对数坐标纸上，从直线部分的斜率就可以得到其分维数.

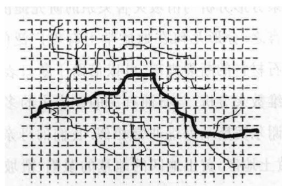


图 7.5

“啊！怎么从斜率就能得出分维数呢？”

忘了计算分维数的公式了吧！从公式(6.4)

$$D_0 = \lim_{\varepsilon \to 0} \log \breve{N}(\varepsilon)/\log(1/\varepsilon), \tag{6.4}$$

$$\log(1/\varepsilon) = -\log\varepsilon,$$

因而

$$D_0 = -\log \breve{N}(\varepsilon)/\log(\varepsilon).$$

当然，地质学上还有一些更符合地貌的一些计算分维的公式，这些太专门了，在这里我们不可能去讨论它们.

对甘肃中部地区研究的结果表明：水系分维数 D 大于 1.7 的区域，是发生滑坡灾害最严重、滑坡点最多的地区.而 D 小于 1.5 的区域，滑坡点就很少.1920 年海原 8.5 级地震灾害厉害地区，水系分维数高是一个主要原因.究其原因，主要是水系发育的影响因素和滑坡形成条件基本相似.甘肃中部其他条件，如岩性、气候条件、地形地貌均差不多，这就为水系分形分析与滑坡灾害关系的研究提供一基础.

总而言之，分形几何在地质学上有着广泛的应用，例如研究岩石材料的断裂机理，可以借助于断口表面凹凸不平的分形维数来分析.与石油有关的砂岩中的多孔团簇结构层次与谢尔宾斯基海绵非常相似.我们的母亲河——黄河，流经黄土地区，黄土地区的地基的湿陷、滑坡给了母亲河无穷的负担.对黄土的微结构的研究，一直是治理黄河的一个重要课题，我们已经投入相当规模的人力和物力去

探索其结构控制机理，也取得了一大批有益的成果. 但是，由于土体微结构是复杂自然环境的综合产物，具有显著的不确定性与非均匀性，难以量化，因而至今的研究工作仍停留于分析水平，岩土工程基础理论——土力学，也不得不长期沿袭传统的连续介质模式，在很多情况下很难逼近土体的自然状态. 人们渴望微结构研究取得突破性进展，从而推动整个土力学理论与实践的飞跃发展. 近年来，有人将分形理论用于土力学，分形理论在岩体结构非确定性问题研究方面取得了重大进展，这给土体微粒结构研究提供了新的思路、注入了新的活力. 因而，人们又开始了新的一轮微结构研究热潮，并普遍认为分形理论很可能成为有效解决土体结构量化问题的突破点.

"水系画在纸上很像是一棵掉了叶子的树."

"我想，计算水系分维的方法也可以用来计算树吧?"

植物的形态存在着明显的自相似现象，同一株植物的各级分枝十分相似，苹果、桃子的果实形状与树冠外形很相像，即构成总体系统（有时称为母系统）的相对独立部分（子系统、子子系统）的形态是整体的缩影. 这促使人们用分形重构方法对植物形态进行计算机模拟，模拟出来的植物图像可以乱真，进而探讨建立新的植物生长机理模型的可能性. 图 7.6 就是用计算机模拟的羊齿叶，图中简单地显示了其过程. 先画一个长方形，如(a)图，按一定比例缩

小，再在底部放上两个按预定角度的更小的长方形，如图(b)；将(b)图按一定比例缩小后，再在底部放上两个(b)图的缩小图形，得(c)图；将(c)图按一定比例缩小后，再在底部放上两个(c)图的缩小图形，得(d)图；以此类推，最后可以做成羊齿叶.

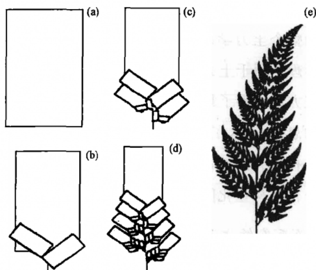


图 7.6 计算机模拟羊齿叶(取自文献[5])

"用计算机来画树，太有趣了！"

其实简单的树不用计算机用手画也可以画出来. 任何计算机程序不过是按照一定的规律，将手工过程让计算机完成就是了. 图 7.7 就是从一条长度为 1 的直线开始，在直线顶端对称地画上两条夹角为 60°、长度为原来的 0.6 倍的直线；以后在每个线段的定点都对称地张开两条线段，长度仍为原来的 0.6 倍，夹角还是 60°；按这个原则画

下去，就成为一棵美丽的树. 如果把夹角变成 120°，则画出来的树就又是另一种风韵. 按照画图的规律，很容易计算出这样的树的分维数.

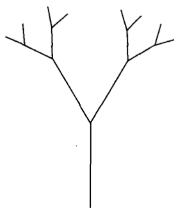


图 7.7

"如何计算这分维数?"

每迭代一次，树枝数增加 2 倍，长度为原来的 0.6 倍，则迭代 n 次，树枝数为 $N=2^n$，长度为 $\varepsilon=(0.6)^n$，则分维数为：

$$D = (\log N)/[\log(1/\varepsilon)] = (\log 2)/[\log(1/0.6)] = 1.357.$$

利用植物形态的分形近似，植物分类学可望建立全球植物的图形库，植物系统学可探讨植物进化的定量规律，而植物生态学则可建立一门新科学——植物形态生态学.

8. 形形色色的分形——分形的应用

与计算海岸线或某些岛屿的轮廓的分维数类似，可以计算很多微粒的分维数.

“计算微粒的分维数有什么用呢?”



该研究空气中微粒的分形了，我们已经被阴霾闹得快窒息了。

粉末冶金是冶金学的一个重要分支,在粉末冶金中,需要的机器零件和其他金属构件,例如研究金属铍粉末的尺寸分布问题,这是与制造原子弹有关的研究:金属铍粉末用于制造原子弹部件以及实验用核反应器中的中子减速器棒.另外,在和平利用原子能方面,研究二氧化铀和二氧化铍的微粒的尺寸和形状,也是很必要的工作,因为这是做核反应堆的燃料棒与减速棒用的材料.

用熔化的铍很难铸成构件,因为它结晶时的大晶体会使构件表面在进行机械加工或抛光时形成缺口,因此减速器是由压缩的铍粉经烧结而成的高密度铍杆制成的.经烧结处理的铍杆的密度依赖于铍粉粒子的形状和尺寸的分布,因此要研究这些粒子的分形结构.

要研究铍粉粒子的形状与尺寸的分布,这是件十分艰巨的任务,因为铍是剧毒的,微粒的铍或其化合物会引起肺部铍中毒,伤口上沾上铍粉将难以治愈并引起溃烂,因此对铍粉必须严格控制,并与外界隔绝.

"啊!做科学研究有时很危险!"

是的,有的科学工作很危险,但并不可怕;因为有一定的规律可循,对有毒的东西,有一定的防护办法,科学工作者一定要遵从防护规则,不要粗心大意,这样就没有危险性了.

金属粉末有不同的制造方法,这些不同的方法决定了粉粒不同的结构与表面能,如图 8.1,为采用三种不同方法

提炼的金属铜颗粒.图(a)为用电解沉淀法制得的高度不规则的金属粉末.

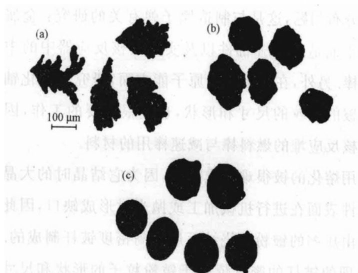


图 8.1 (取自文献[6],图中标长为 100 μm(微米))

“什么是电解沉淀法?”

电解沉淀法,就是利用铜的电解溶液,如硫酸铜溶液,通过电解的方法让金属铜沉淀的方法.在硫酸铜溶液中铜以正离子状态存在,硫酸根以负离子状态存在,通电后,铜离子就在负电极上沉淀.

用电化学方法研究凝聚体生长形态随生长条件变化的规律,是分形应用中一个很有趣的问题.为了要看金属分子是如何凝聚的,可以做这样的处理:在两片圆玻璃片之间围一圈铜片,使之成为一个玻璃器皿,中间放上一层硫酸铜溶液,溶液厚度约 2—3 毫米,上面一个圆玻璃片中间放一个负极,器皿边缘的铜片为正极,如图 8.2 所示意.

通电后,金属铜分子就在负极周围沉淀凝聚,在上玻璃片上形成分形花纹.同样也可以用硝酸银溶液中凝聚银分子得到银膜的分形结构.在实验中可以发现,银膜生长后很稳定,而且比较容易生长;铜膜的生长不仅困难,而且生长后的铜膜在很短时间内(几分钟)会发生结构变化.在恒电位控制下(硫酸铜溶液浓度为 0.1 mol/L),铜膜生长开始时是沿阴极周界向外快速进行的,膜层较薄且成淡绿色,并且有明显的树枝状纹路;随后生长速度减慢,边界处铜膜变厚,逐渐呈现深红色.提高电压后,沿周界又开始有淡绿色较薄的铜膜生成,不久,约过了 20 分钟,这种生长速度开始减慢,边界处又出现深红色较厚膜层,同时膜内的铜凝聚体开始沿生长纹路逐渐增大,并且具有明显的分形形态……这种变化机制与铜分子的化学物理性质有关,从理论上研究这些现象的原因是很有意义的.

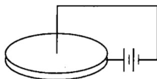


图 8.2

我们再来看图 8.1 中的(b)、(c),图(b)为将粉碎的金属化合物,作化学还原处理制得的圆形粒子,也就是说,先将金属化合物粉碎后,用化学还原反应得到纯粹的金属.图 8.1(c)为喷射制粒法制得的金属丸,该工艺称为金属的原子化或雾化;如果喷射出的微粒在冷却塔中冷却的过程

比较慢，得到的金属粒子几乎是球形的，猎枪子弹就是用这种方法做成的.

测量各种不同方法制得的金属微粒的分维，在粉末冶金中，可以得到合乎要求的金属器件.

对炭黑微粒分形的测量，也是一个很有意义的工作.

“什么是炭黑？研究它有什么用？”

炭黑是天然气在缺氧的条件下燃烧制得的碳的聚集体，这种在火焰中形成的炭黑，用一块冷却金属板收集. 在美国，每年生产的炭黑就达 908 吨，其中 3/4 用于橡胶工业，橡胶中加入炭黑为的是增加橡胶的强度. 碳黑还在墨水、擦光剂、油漆以及复写纸等工业制造中用作颜料. 对一般外行来说，炭黑似乎只是油烟的商品名字. 其实不然，油烟是石油和煤不完全燃烧产生的黑色沉淀物的总称. 由于那些燃料中含有高分子化合物，在特殊设备中作不完全燃烧时，油烟中往往含有许多致癌物质. 而炭黑是由天然气制得的，不含任何高分子碳化合物，因而也就没有致癌物质.

“为什么要研究炭黑的分形？”

在工业上把炭黑与黏滞溶剂混合时，需要确定流体在炭黑周围的流动特征，并进而确定炭黑在黏滞流体中的下沉速度；这些都与炭黑的形状有密切的关系. 在分形概念提出以前，是用椭圆或凸壳线（convex hull）来描写炭黑或

类似的粉尘，如图 8.3(b)所示. 分形理论提出后，用分形来描述炭黑就更与实际一致，1975 年曼德里阿(Medalia)首先拍出一张有名的炭黑的照片，这张照片引起很多人对研究炭黑微粒的兴趣. 从这张照片上看，炭黑好像是由许多球体组成的，如图 8.3(a)所示. 可以像测量海岸线分维一样来测量炭黑的分维. 用两种不同的步长，一种是以聚集体的最大投影为单位长度，步长用 λ 表示，另一种以球直径为单位长度，步长用 λ'表示，图 8.3(c)中 P 为周长. 当 $\lambda=0.18$—0.4($\lambda'=0.98$—?)时，分维数 $\delta=1.22$；当 $\lambda=$

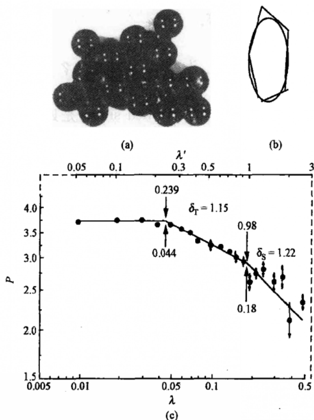


图 8.3 (取自文献[6])

0.044—0.18 (λ'=0.239—0.98)时，分维数 δ=1.15；在 λ=0.044 以下，分维数为 1，为欧几里得边界. 把炭黑在溶剂中的性质与其分形的分维数联系起来，就比用椭圆或凸壳线要实际得多.

研究很多微粒的分形还紧密联系着人的健康问题. 在很多工业生产中，都会出现很多粉尘，有些是污染空气的粉尘，如烟囱排放的煤炭烟雾，内燃机排出的烟雾，汽车的尾气等；有些是工业上有意制造的粉尘，如制陶业中的陶瓷粉尘，原子能事业中的二氧化钍、二氧化铍等粉末，工业上广泛使用的硅石雾等.

"什么是硅石雾？为什么要制造它？有什么用？"

硅石雾的英文名字为：fumed silica，是四氯化硅在氧气和氢气的火焰中烧裂而成的一种微粒结构. 硅石雾经常被加入食品和药品中以改善流动性，称为流动剂. 这是由于硅石雾微粒是一种非晶态结构，比较容易溶解. 在北美洲，政府法律允许食品和药品中含有不超过 1%重量比的硅石雾，以保证食品以及药品在人们的肠胃中容易分解与吸收. 另一方面，在食品与药品中加入硅石雾还有一些好处：由于硅石雾微粒具有比较大的表面积，有助于产品包装时排出可能存在的潮气；又由于硅石雾微粒增加了产品粉粒之间的摩擦力，可以防止产品在储藏和运输过程中因受压而发生结块.

可是在硅石雾制造过程中，工人吸收了硅石粉末，容易

引起矽肺病;因此要研究各种粉末在肺部器官中的运动和沉淀.在研究中,常用空气动力学直径、沉淀因子等概念.

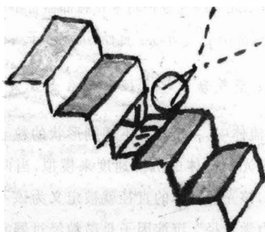
"什么是空气动力学直径?什么是沉淀因子?"

在黏滞流体中,一个具有不规则形状的粒子的沉降速度,常用一个光滑球体的沉降速度来模拟,当两者的沉淀速度相同时,该光滑球体的直径就被定义为该不规则粒子的"空气动力学直径".沉淀因子是微粒经过器官或肺壁时被沉淀的百分比.当粒子为简单几何形状时,这些量比较容易与粒子的外观和尺寸联系起来.但这种联系是很不够的,因为粉尘都不是简单的几何形状,而且具有分形结构的粉尘对肺部和器官的伤害要比简单的几何形状的粒子严重得多.例如,香烟烟雾中的致癌物质若被吸收在石棉粉尘上,被吸入人肺时,比单独的烟雾致癌物质要危险得多.因此研究各种粉尘粒子的分形结构,研究粒子的分维数与对人体的伤害之间的关系是一个很重要的课题,这样的课题正方兴未艾.

分形几何在烧蚀问题上也正在起重要作用.

"什么是烧蚀问题?"

烧蚀问题是航天科学和武器研究中一个重要问题.在飞行器再入大气层时……



啊！最害怕烧蚀问题！

"什么是再入大气层?"

再入，就是飞行器完成了它的任务后再经过大气层回到地球上来.由于飞行器与高速空气发生摩擦而使表面达到很高温度，以致表面受到损蚀，就是所谓烧蚀.当然，飞行器都是耐高温的材料做成的，但也免不了有烧蚀发生.由于烧蚀作用，造成飞行器形状的小尺度不对称，这种不对称产生纵向和横向的扭转力矩，导致飞行姿态的改变，造成飞行器轨道的偏离甚至飞行器的损坏.针对烧蚀，国内外科学家进行了不少理论分析和实验研究.烧蚀图像是与边界流体场状态紧密相关的，层流、湍流以及转捩区有着不同的烧蚀花样.但是目前对烧蚀图像的研究多数是唯象的、半定量的，对烧蚀后表面的状态也没有合适的表征方式.烧蚀问题的实验研究是靠在实验室的风洞中做.

"什么是风洞?"

顾名思义,风洞就是在实验室建造一个直径很大的通道,用鼓风机产生很大速度的气流,航空上飞行器的各种模型都在风洞里做测试.要做烧蚀的测试实验,有比较大的难处,一个难题是,需要高温,由于电弧加热风洞的功率有限,很难达到与实际情况一样的高温;另一个难题是,耐高温的材料很昂贵,只能做很小尺度的几何相似模型来做试验.然而烧蚀的实际情况是复杂的,仅有几何相似是不够的,烧蚀表面的图形是复杂的,再入大气时飞行器表面的压力脉冲也是随机的时间序列.现在这方面的科学家们,已经着手利用非线性科学、特别是分形概念,用分维数定量描述烧蚀表面与压力脉冲序列,从而有可能提高烧蚀模拟实验的可信度,而且运用分形理论,可以用熔点低些的廉价材料做大尺度的模型实验,以获得关于烧蚀的更多信息.中国科技大学近代力学系的伍小平、金峰等对烧蚀问题进行了分形分析的探索,在测量的基础上计算出所提供样品的烧蚀表面的分维数,并提出压力脉动时间序列分维数的计算方法,为进一步研究烧蚀问题的相似律打下了基础.

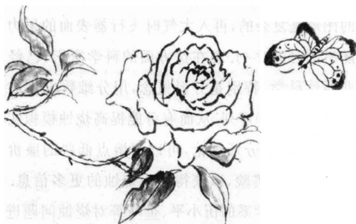
"为什么烧蚀的表面会有很多分形花样?"

这是因为对再入飞行器烧蚀图像,起决定性作用的是边界层空气流动的状态,其中湍流占主导地位.当流体运动有较高雷诺数时,流体中出现湍流,流体除了一个平均

速度的运动外，还叠加了一个不规则的涨落运动，这种涨落运动是“流体团”运动，或“涡旋”运动. 湍流运动由很多微小的涡旋运动组成，具有分形边界的湍流边界层，导致了分形结构特征的烧蚀图像.

计算机在分形的研究中起了很大的作用. 例如在化学反应的催化研究中，计算机就起了很大的作用.

“催化剂是怎样让化学反应加快的?”



我去给花加点催化剂!

有些化学反应，参加反应的物质都是气态，要两种或几种气体分子碰在一起才能进行反应，由于各种气体分子碰在一起的机会很小，因此反应的速度很小. 固体催化剂的作用，是将要发生化学反应的两种或两种以上的气体分子，吸附在自己的表面，使它们接触在一起，从而加速了化学反应. 近年来，越来越多的研究表明，催化剂颗粒是一个分形体，它的表面是不规则的，具有分数维特征. 催化剂表

面的分维特性与它的催化特性有很大联系. 实验上要确定一种催化剂表面的分维,并通过实验研究这种表面分维与催化特性之间的关系,所需的工作量很大. 因此,国内外许多学者,都首先用计算机模拟了催化剂表面的分形的形成过程,然后再模拟要发生化学反应的元素或化合物被催化剂表面吸附的过程. 中国科学院山西煤炭化学研究所郭向云、李永旺、钟炳等用计算机模拟这两个过程,其简单的步骤如下所述. 催化剂分形表面的生成过程用如下几个过程完成:

(1) 先产生一个 200×200 的方格网络平面.

(2) 在网络中随机地放置若干个种粒子作为凝聚核心,如果种粒子数为 1,则把种粒子放在网络中央.

(3) 在网格上某个随机位置产生一个粒子,从该位置开始作随机运动,在上下左右四个方向上随机地选择一个方向并移动一个网格.

(4) 如果运动粒子运动到和种粒子相邻的格点上,就停止运动并成为凝聚体的一部分.

(5) 重复进行步骤(3)与(4),直到粒子数达到预先设定的数值.

(6) 计算表面的分维数.

吸附化学反应元素或化合物过程的模拟如下:

(1) 在网格上随机地选择一个格点,判断该点是否有粒子存在,若该点已被占据,则重新选择一个格点.

(2) 气体分子从该点开始作随机运动,每次游动一个

格点.

(3) 如果运动分子碰上构成表面的粒子,则发生吸附.如果碰上的是一被吸附的气体分子,则判断其相邻的其余三个格点,若至少还有一个格点被占据,无论是被气体分子还是被构成表面的粒子占据,则都能被吸附,否则返回步骤(1),重新引入下一个分子.

(4) 满足所设定的条件(如预定的化合物分子数)时,终止运行.

当然,按照所研究的具体反应,可以合理地修改上面的过程.

在催化科学中,分形是个崭新的概念.催化剂的分形数进一步可望与表面吸附、化学反应等参数相联系,可望在催化剂表面设计与化学体系匹配之间建立一种有效的关联.由于实验上制备催化剂分形体时无法预知其分维数,可以料想,计算机模拟将在这方面的研究中扮演一个非常重要的角色.

9. 布朗运动

我们现在来谈谈布朗运动问题.布朗运动是 1827 年英国植物学家布朗(Brown)发现的.1906 年法国化学家佩兰(J. B. Perrin)继续研究布朗运动,画出了布朗粒子的运动轨迹.

"这轨迹图形很难画吗?为什么那么久以后才有人画出轨迹?"

这轨迹是要很耐心地在显微镜下画出来的,1903 年德国工程师西登托夫(H. F. W. Siedentopf)等发明了超显微镜,大家开始应用超显微镜研究胶体颗粒,佩兰才有可能应用超显微镜观察布朗运动,画出了如图 9.1 所示画的三个布朗粒子的轨道.他用的布朗粒子为半径 0.53 μ 胶体颗粒,1 μ 就是 1 微米(μm),即一百万分之一米;因此必须用

超显微镜才能看清楚它的运动状况.

"为什么布朗粒子的轨迹都是折线?"

画图 9.1 的办法是这样：在装放布朗粒子的玻璃器皿下安置一坐标纸，坐标纸网格的宽度为 3.2 μm. 取一定的时间间隔，佩兰取的时间间隔为 30 秒钟，每过了 30 秒钟，把粒子位置记下来，在相邻两位置之间画一条直线，这样就把粒子的轨道画成了折线. 图 9.1 是已经拿去网格后的同时画的三个粒子的轨迹.



图 9.1 (取自文献[14])

"恐怕粒子在 30 秒钟内不一定是走一条直线吧?"

是的，假如把时间间隔变成 60 秒钟，则原来的两段直线就成为一段了，如图 9.1 中，原来 a,b 两段直线变成了 c 一段直线；如果时间间隔换成 15 秒，原来的一段直线成为两条直线所成的折线. 时间间隔越短，折线越细小；若每秒

钟记录一次，则原来 30 秒记录下来的一段直线变成由 30 条小直线形成的折线. 虽然不同时间间隔的折线形状并不完全相同，但却有着自相似的性质. 布朗粒子的轨迹，与很多自然界的分形曲线一起被庞加莱称为“怪物的画廊”.

“为什么要叫‘怪物的画廊’?”

因为当时大家都觉得有规则的几何图形，例如圆、椭圆、连续的曲线等是正常的，自然界出现的分形曲线被视为不可理解，于是幽默地说是怪物的画廊. 在这怪物画廊中，布朗运动轨迹显然是最引人入胜的图形之一.

“为什么说是最引人入胜的图形?”

这个问题可以这样来看：首先，虽然自然界有着形形色色的分形曲线，如海岸线，各种微粒的分形等等，但这些分形的研究只能是在测量出分形的分维数后，找出分维数与其他性质的关系，而并不能找出其所以会成为这样分形的内在规律，更不能写出某个方程式来说明为什么会有这样分形出现的原因；这也许以后会有，但至少目前还不能. 布朗运动不同，布朗粒子可以用一个很明确的运动方程式来描写，这运动方程式就是著名的朗之万(Langevin)方程，实际上就是经典的牛顿运动方程式；因此布朗运动画出的分形曲线是有着与其相联系的运动方程式的.

"虫口模型与北美鹦的生态模型不也是既有方程式又有美丽的图形的吗?"

是的,我们在第6章中曾经介绍如何用复变数画出它们的一些漂亮的图形.但那些漂亮的图形,虽然是有一定意义的方程式与它们联系着,是按一定的规律画出来的,但也就限于只看到自相似的分形;由于用的是复变数,这美丽的图案到底代表了什么具体意义,却很少有人能说清.因此虽然可以画出很多很多,甚至形成了一种新型的美术,或一种计算机游戏,人们却还不太理解它们的物理意义.布朗运动不同,虽然布朗粒子的轨道没有那些图形美丽,但它却有着实际意义.

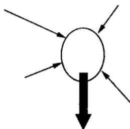


图 9.2

其次,布朗运动有着广泛的应用.布朗最初发现的是花粉微粒在水中的不规则运动,花粉微粒(即布朗粒子)运动的原因是由于受到周围水分子对它的作用(图9.2),朗之万方程就是把周围介质分子的作用巧妙地分成了两部分,一部分是平均作用,这对布朗粒子是一种阻尼力,是妨碍它运动的,是消耗布朗粒子的能量的;另一部分是随机

力，由于介质分子的不断运动，给布朗粒子的作用力各方向不同，因而促使它做无规运动，这随机力是提供布朗粒子能量的. 除了周围介质分子给它的这两部分力以外，布朗粒子还可以处在外场中，还可以受到一个外场力；例如在重力场中，受到一个重力. 一个系统，假如与布朗粒子类似，也受到一个阻力、一个无规力、一个外场力，我们也可以把它作为布朗运动来处理，例如原子核裂变问题.

"原子核裂变？这与布朗运动太不相同了！"

猛一想，好像原子核裂变与布朗运动有很大不同，其实不然. 大家知道原子核由什么组成的吗？

"由中子与质子组成."

对，中子与质子又合称为核子. 一个大的原子核，譬如铀原子核，由 238 个核子组成. 这些核子相互之间有作用力，相互之间有吸引力才能不散开；核子靠得很近时又有推拒力，否则要越吸越紧. 核子又在不停地运动；核子的不停运动，使得整个原子核会发生形变. 原子核忽而从球状拉长成椭球，忽而又从椭球变成球；拉长拉得厉害了，椭球变成了哑铃状，即出现了细脖子，或是对称的哑铃，或是不对称的哑铃；细脖子可能又变粗，也可能变得更细以至于最后断开(图 9.3).

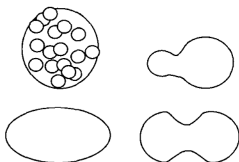
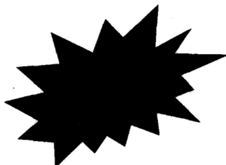


图 9.3

"断开就是裂变了吧?"

对,断开就是裂变了,有时候细脖子细到一定程度,即使还没有断开,然而再变回到椭球或球状已经几乎不可能,也可以认为已经裂变了.原子核从球状到裂变的过程中,引起一系列的各种形状的变化,其动力之一就是因为组成原子核的核子的不断无规运动,这无规运动给形变一个无规力,就像布朗粒子在介质中受到一个无规力一样.其次,核子之间存在相互作用力,这些作用力对形变的影响,可以分成一种平均的阻力,这种平均的阻力类似于布朗粒子在介质中受到的阻尼力;另一部分,与原子核的形状有关,这一部分力相当于外场力.因此一个原子核的裂变过程,与布朗粒子的运动非常类似,可以用类似的运动方程式来处理它.我们曾经用布朗运动模型计算过一些原子核的裂变几率,得到很不错的结果.

"宇宙的起源是大爆炸，大爆炸能不能像原子核裂变那样用布朗运动来处理？大爆炸以前的宇宙是不是也在做布朗运动？"



大爆炸以前的宇宙是不是在做布朗运动？

"我们古代不是有盘古开天辟地的神话吗！恐怕盘古就是在一个混沌的大鸡蛋中不断做布朗运动，动着动着就发生大爆炸了！"

你们的想象很丰富，很有趣. 能这样去想象是无可非议的，但到现在还没有人这样去想象大爆炸以前的宇宙，因为这样的问题太大了，而且有很多很多没有解决的问题，包括宇宙的起源是不是真的从大爆炸开始. 一个科学家一定需要有超前的想象，这种想象能给科学家一种动力，促使科学家不断地深入到科学中去. 但也必须注意，想象一定要有足够的科学基础，例如若要想象宇宙的起源问题，必须把现有的有关理论弄清楚，否则就成为瞎想，瞎想会变成钻牛角尖，浪费时间，浪费精力，说不定还会受别有用心的人欺骗. 因此一定要首先学好科学.

了解了布朗运动轨迹的分形规律，也许可以用分形的一些性质，来解决裂变的布朗运动模型中的一些繁杂的计算问题.

“你们这样做了吗?”

还没有，这也还是我们的一种想象，这想象是可行的；可是，也许这样的研究课题只能留给你们年轻的一代了.

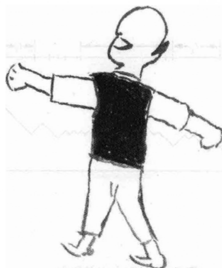
布朗运动过程也可以利用计算机来模拟.

“前面讲的用计算机模拟催化剂表面的产生与吸附化学元素的过程，一个个随机地产生粒子，粒子随机地运动到一个个空格子中去，也是布朗运动吧?”

不是. 前面我们讲的粒子随机地运动到一个个空格中去，是粒子的无规行走(random walk)问题，与布朗运动是有差别的. 布朗运动的计算机模拟，是利用计算机产生一个无规力，在很短一段时间间隔内，运用布朗运动的运动方程式，计算出粒子的移动位置. 由于有外力场存在，粒子移动的范围不再是一个平面，必须有一个山坡，一个具有马鞍形的山坡；象征原子核形变的布朗粒子必须能爬过山坡才能算是发生裂变，因此要比无规行走复杂得多. 无规行走只是一个概率论中称之为马尔可夫(Markov)链的数学问题. 粒子作无规行走的运动没有物理内容；也就是说，粒子既没有受到具体的力，如外场力、黏性力、无规力，也不具有反映惯性的质量. 只是很多具体的物理问题可以与

无规行走联系起来而已. 最简单的无规行走是一维的无规行走,可以用一个醉汉的前后行走来描述:

一个醉汉,从一起始点开始前后行走,每走一步,向前的几率为 p,向后的几率为 q,问走了 N 步后,有 N_1 步向前的几率为多少?



我走一步,向前与向后的几率一样. 哈哈,因为我醉了!

假如 $p=q=1/2$,则上面的无规行走问题与掷一个镍币的问题一样,等于是问掷了 N 次镍币后,有 N_1 次正面朝上的几率. 这个几率的计算是很容易的,但现在我们不去讨论这个几率的计算问题,我们可以试着画出这个随机运动的几次结果. 如图 9.4,为醉汉每从头走 50 步画出的状况,(a)图是第一次走 50 步,每一步的位置随时间变化折线,(b)图相应用小短线标出回到其始点的位置,可以看出,第一个 50 步,其中有 15 次回到了起始点;(c)图为第二个 50 步的折线,其中只有一次回到了起始点.

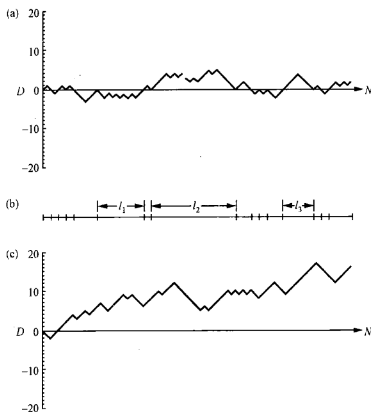


图 9.4 (取自文献[6])

“为什么第一个 50 步与第二个 50 步会有那么大的不同呢?”

这原本是一个概率性的问题,要是你们用一个镍币来做试验,正面朝上时向前走一步,反面朝上时向后走一步,就能画出各种各样的曲线来;各条曲线都不会相同.它们只有统计规律性,譬如说,走 50 步后,**平均**有多少次是向前走的,**平均**有多少次刚好回到起始点,也就是表现为曲线与水平轴相交.将相交的点画在另外一直线上,忽稀忽密很像康托尔集;分形几何的创始人芒德布罗在自己的著

作中就曾经提到，他就是看到了与无规行走结果相似的噪声问题，而感到发展分形几何的必要性的.

"噪声与无规荡步相似吗?"

噪声的发生有各种各样的因素，有一种噪声来源于放电器件的散粒效应. 当一个仪器有真空放电器件时，发射电子的阴极在相同的时间间隔中所放的电子时多时少，这就是所谓的散粒效应. 散粒效应形成了一个微弱的信号，这信号就是噪声. 散粒效应可以用无规荡步来分析：处在同样的时间间隔中，犹如是同样走 50 步；在这时间间隔中发射的电子数，犹如在走了 50 步后，其中向前的步数. 当然，这类物理问题与掷镍币是不同的，因为发射一个电子的几率(相当于向前的几率 p)与不发射一个电子的几率(相当于向后的几率 q)是不相同的.

分形在很多波动问题上正在渐渐得到很广泛的应用，许多自然界中的声振动也可以用分形来模拟，如无规边界湖水下振动的研究，沸腾时的噪声，音乐厅无规墙壁的回声等. 将来大家工作时也许会碰到这些问题.

在医学上混沌与分形的应用也不少，心脏的跳动、器官的分支等都与混沌及分形有很大关系.

10. 混沌与分形的展望

一个系统要出现混沌状态，其运动方程式一定是非线性的，许多非线性运动方程式最后会出现奇怪吸引子. 奇怪吸引子具有无穷层次的分形结构，即自相似性. 可以说，一个系统的混沌运动是它的本质，分形是它的表现形式；换句话说，混沌学与分形学具有很深的内在联系，如果说分形几何为描写混沌吸引子的内部结构提供了一个很实用的语言，那么，混沌运动则被认为是产生分形结构的根源.

由于混沌动力学系统的奇怪吸引子往往是典型的分形，因此奇怪吸引子研究是最近几年分形理论中最活跃和最有吸引力的一个领域.

"在上面讲到的形形色色的分形，好像只看到分形，没有看到与它们联系着的混沌运动?"

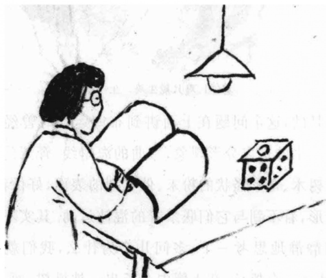


老伴！鸡只能生鸡，生不出凤凰

是的，这个问题在上面讲到布朗运动时曾经提到过. 大自然中的很多分形现象，弯曲的海岸线、奔流的水系、美丽的树木、奇形怪状的粉末、催化剂的表面，好像都是固定的分形，看不到与它们联系着的混沌运动. 其实不然，只要我们静静地思考一下，多问几个为什么，我们就会想到："为什么一个桃核，在土壤中会长出一株桃树，而一棵麦子只能长出一株麦苗?"这是因为，遗传信息已经孕含在种子中了，细胞按着自己特定的规律进行着运动和分裂，成年植物最后的形态，是细胞运动和分裂最后的结果，是生命运动形式最后表现出的奇怪吸引子. 可惜我们现在写不出像单摆那样简单的运动方程式，来描述生命的过程，但这也许迟早是会有的. 很多学科已经在试着写出一些方程

式，虫口模型就是一个很好的例子.

大自然给我们制造了那么多美丽的分形，当我们不能像描述机械运动那样很容易地写出它们的运动方程式时，好像一切都是偶然的. 这其实就是我们在思想上，确定论与概率论分道扬镳的表现，一方面我们沉湎在确定论给我们的喜悦中，机器按照一定的规律运转着，卫星按照我们的意志飞到一定的轨道上. 另一方面形形色色的大自然、大宇宙却又使人们惊奇，人们惊呼：原来“上帝在玩骰子！”



上帝到底玩不玩骰子？

“为什么说‘上帝在玩骰子’？”

骰子是一种赌博工具，玩骰子是最浅显的能表示随机行为的现象. 大自然中处处显示出随机现象，如同造物主在随机地创造世界. 可是大科学家爱因斯坦坚持认为：上

帝并不掷骰子.

"大科学家还迷信,还相信有上帝?"

这不是迷信.爱因斯坦在与朋友或学生谈话时,特别喜欢提"上帝"二字,他说的上帝,不是基督教神父所说的神;指的是客观世界存在的内在规律,是人们经过努力可以不断地认识与深化的规律性.他有一句名言:"上帝难以捉摸,但是不怀恶意."(Raffiniert ist Herr Gott, aber boshaft ist Er nicht.)意思就是,客观规律虽然是难以捉摸,但总是可以慢慢掌握的.

关于上帝是不是在玩骰子的问题,爱因斯坦与丹麦的伟大科学家玻尔(N. Bohr)在认识论上进行了著名的大争论,这争论从 1927 年 9 月科摩国际会议开始,一直延续到 1955 年爱因斯坦去世.玻尔从量子力学的不确定关系出发,认为不确定关系是大自然的内在规律,因而量子力学对运动的概率解释是完备的.

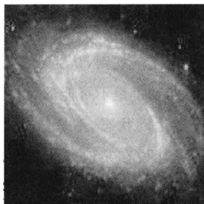
"什么是不确定关系?"

这是量子力学的基本规则,认为对微观粒子,如电子,同时确定它的位置与动量是不可能的.由此建立起来的量子力学,认为电子的运动状态,不是像行星绕着太阳那样走明确的轨道,而只能说在某地方的几率是多少.换句话说,玻尔认为:"上帝在玩骰子."而爱因斯坦反对抛弃严格的因果性概念,坚信基本理论不应当是统计性质的,"上帝

不玩骰子". 这是两位都有伟大贡献的科学家之间的争论，谁也没有说服谁. 1955 年爱因斯坦去世；1962 年，玻尔去世，玻尔在去世的前一天晚上，还在思索着这场不同寻常的科学论战，为没有能说服爱因斯坦信服量子力学的概率解释而抱恨终身.

"是不是混沌理论能把爱因斯坦与玻尔统一起来?"

也许可以，但这不是一件容易的事，到底应该如何评价他们的论点，是一个需要花极大精力研究的课题. 因为量子力学在微观领域有着很大的成功，要对它的理论作新的解释还需要科学家们极大的努力. 当然，非线性运动方程的研究，使人们感到确定论与概率论之间并没有不可逾越的鸿沟，并且越来越使人相信，客观的存在其实质都是非线性的，整个宇宙也许就是一个混沌运动的奇怪吸引子.



宇宙会不会就是一个奇怪吸引子?

"啊！这多有趣！"

当然，现在说这样的话只能是一个猜想，混沌的研究只能说刚刚开始，对刚开始认识不久、又有着丰富内容的混沌运动，每个有志于科学的人，都可以展开想象的翅膀，尽情地飞翔.

在科学发展史上，几何学与物理学总是密切地联系着的. 当我们用线性的运动方程式研究一个质点在中心力场运动时，例如在万有引力的作用下，行星绕太阳的运动，得出的轨道的几何图形是各种偏心率的椭圆. 当物理学上忽略了非线性，热衷于研究线性问题时，几何就被欧几里得几何统治着. 在经典物理取得辉煌成就以后，物理学的研究注意力从宏观物体转向了两个极端.

"如何的两个极端？"

一个极端是向着微观方向发展，研究的对象越来越小，从分子→原子→原子核→电子、中子、质子→基本粒子→……，另一个极端是向着宇观方向发展，研究的对象越来越大，从太阳系→银河系→星云→宇宙的起源→…….混沌与分形的出现，让人们的注意力又转向了宏观世界，原来宏观世界还有着很多问题没有研究清楚. 宏观世界是非线性的，非线性的自然界有着那么多的问题等待着人们去了解，是那么丰富多彩.

“现在科学家们对混沌与分形在研究些什么?”

各个学科研究的重点有所不同. 理论物理学家们在潜心研究非线性的力学问题，例如多维的混沌问题，量子混沌问题.

“研究量子混沌问题是不是就是解决爱因斯坦与玻尔的争论?”

嗨! 大家对这场争论很感兴趣了. 现阶段关于量子混沌问题还远没有牵涉到那场争论. 量子力学是研究微观粒子运动而建立起来的，经典力学是量子力学用于宏观物体的极限状况. 宏观物体的运动存在着混沌现象，则微观粒子的运动也应该必然存在着混沌现象，经典混沌与量子混沌也必然有一个过渡的问题. 当然，量子混沌的研究，应该期望能对量子力学的几率性做出新的解释. 总之，理论物理学家们总是希望从根本的运动方程式来追究混沌的内在本质，找出它们的规律性.

力学理论上还有古老且难度很大的流体力学的湍流问题，仍一直需要很多人去潜心研究.

“流体力学的湍流那么难啊!”

不但湍流问题很难，就是一个貌似很普通的流体力学问题，真想要写出方程式来解决，也是很难的. 如图 10.1 所示，为一水龙头在滴水. 我们想办法把每滴一滴水的时

间记录下来,譬如说,让水滴在一束激光与一个光接收器之间掉落,当水滴经过时,接受器接不到激光,就发一个信号记下水滴经过的时刻. 设这些时刻为 $t_1, t_2, t_3, t_4, t_5, t_6, \cdots, t_n, t_{n+1}, \cdots$,令 $\Delta t_n = t_{n+1} - t_n (n=1,2,3,4,\cdots)$ 为相邻两水滴的时间间隔,当水龙头开得很小,水滴滴得很慢时,每两滴水经过时间之间的间隔都相等,即 $\Delta t_1 = \Delta t_2 = \Delta t_3 = \cdots = \Delta t_n$,当水龙头开得大一点,水滴滴得略快一点时,时间间隔变成一短一长互相交替,即 $\Delta t_1 = \Delta t_3 = \Delta t_5 = \cdots$,而 $\Delta t_2 = \Delta t_4 = \Delta t_6 = \cdots$,即时间周期变成两个水滴为一周期,即滴、滴—、滴、滴—、滴、滴—…. 若再让水龙头开大一点,水滴更快一些,则时间间隔变成多次不同,要回到原来的时间间隔的周期不断变长,甚至最后到完全混乱,即找不到相同的时间间隔. 这与虫口模型的周期变化很有些相似. 按理说,一个水滴的运动应该不难写出方程式来吧!其实不然,水滴在水龙头口上形成与下滴,与水滴所受的重力、水的表面张力、水滴的形状、下滴时的形变、水管子中水的流速、压力都有关系,要写出水滴的动力学方程式,可不是一件容易的事. 因此水滴时间间隔的周期性变化,也只能是知其然而不知其所以然的现象.

混沌动力系统、分形几何又一次为数学工作者提供了用武之地,形形色色的非线性方程式需要数学工作者提供解法;分形几何的出现需要数学家们给出统一的理论. 分形的奠基者们,已经在分形集的结构及其分类、测度理论、维数理论、标度变换理论、动力系统、分形吸引子的结构与

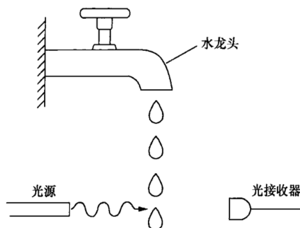


图 10.1 （取自文献[1]）

维数等方面，辛勤耕耘，结出累累硕果. 但是还有不少尚待开掘的宝藏，例如，建立既严格又简单的维数理论与计算方法；很多动力系统中分形吸引子的维数计算；芒德布罗集的某些性质的探讨，等等. 混沌与分形这块科学阵地，真像是一块荒漠之地，拓荒者曾经抡过几锄，还留下无数宝地，有待人们去探索.

对物理、化学、地质、地理、生物、医学、冶金等应用科学领域，分形与混沌理论大大打开了各学科的眼界. 各学科的科学家们主要致力于分形几何对本学科的应用，从分形理论获得许多新认识和新进展：物理中的湍流与相变，化学中的高分子链、催化剂表面、凝胶，天文学中的星团分布、宇宙大尺度结构，地学中的渗流、地貌演化，地理中的河流与水系，医学中的人体组织结构（如血管、肺、心脏等的分形描述），材料的损伤断裂，石油开采中的掘进，等等. 有时候，通过实验测定、计算机模拟和理论分析确定的分

形维数惊人地一致,并能有效地确定某些物理过程的主要特征.但很多时候,维数意义的解释却是一个主要难题.比如“浮云的投影为什么会在一个较大的尺度范围内有维数为 1.35 的边界?”“金属表面的维数如何影响它的物理性质,如热辐射和摩擦系数?”“使地形的维数为 2.2 的地质学过程是什么?”等等.也就是说,应用科学还正在往深刻揭露事物本质的方向发展.

“应用科学中就写不出什么方程式吗?”

不是,很多学科在测量分形的同时,也在努力找出很多能符合实际的方程式,例如地质与地理方面的方程式.化学方面也是这样.例如著名的化学振荡问题,称为比罗索夫-扎勃廷斯基(Belousov-Zhabotinski)反应,1958 年由比罗索夫首先研究,1964 年扎勃廷斯基继续深入探讨,可以按照化学反应写出方程式来,是一个很有趣的三维非线性问题,能预测化学振荡结果,与实验上看到的化学振荡完全一致.

在各种不同学科中,混沌的出现可能是有害的,也可能需要混沌.因而如何控制混沌也成为各行各业的科学工作者热衷于研究的课题.

混沌与分形的普遍性,打破了学科间条块分割的局面,不但是自然科学,包括人文科学也都可以应用,经济学家们正在努力把混沌与分形应用到经济领域中去,虫口模

型在经济领域中的应用就是一个很好的例子.

我们讲到这里就告一段落,只能是给混沌与分形做了一个简单的介绍.这是一个很引人入胜的领域,希望大家能感兴趣.

参考文献

[1] Ott E. Chaos in dynamical systems. Cambridge University Press，1993.

[2] Gleick J. CHAOS. Penguin Books，1988.

[3] Feigenbaum M J. J. Stat. Phys.，1978，25：19.

[4] Henon M，Pomeau Y. Two strange attractors with a simple structure. Comm. Math. Phys.，1976，50：69.

[5] 汪富泉，李后强. 分形——大自然的艺术构造. 济南：山东教育出版社，1996.

[6] Kaye B H. 分形漫步.〔加拿大〕徐新阳等译. 沈阳：东北大学出版社，1994.

[7] 陆同兴. 非线性物理概论. 合肥：中国科技大学出版社，2002.

[8] 胡岗. 混沌控制. 上海：上海科技教育出版社，2000.

[9] 张化光. 混沌系统的控制理论. 沈阳：东北大学出版社，2003.

[10] 郑伟谋，郝柏林. 实用符号动力学. 上海：上海科技出版社，1994.

[11] Bai-Lin Hao，Wei-Mou Zheng. Applied symbolic dynamics and chaos. World Scientific，1998.

[12] Ditto W L，Rauseo S N，Spano M L. Experimental control of chaos. Physical Review Letters，1990，26(65)：3211.

[13] 陈颙. 分形几何学（第二版）. 北京：地震出版社，2005.

[14] Mandelbrot B B. 大自然的分形几何学. 陈守吉，凌复华译. 上海：上海远东出版社，1998.